

VII. óra: Látjuk a fától az erdőt

Az óra célja: A fa és erdő fogalmának megismerése, a fa élszámára vonatkozó tétel felfedezése.

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf, izolált csúcs, gráf csúcsának fokszáma, kör, út, összefüggő gráf

Központi fogalmak: fa, erdő

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Gráfok rajzolása	egyéni munka		5 perc
2.	Fa, erdő fogalma	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
3.	Stratégias játék	pármunka		10 perc
4.	A fa élszáma	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
5.	Feladatmegoldás	egyéni vagy páros munka	feladatlap	8 perc
6.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán megismerkedünk a fa és az erdő fogalmával. Utána egy stratégias játékot játszva megsejtjük a fa élszámára vonatkozó tételt, amit be is bizonyítunk. Ha marad idő, az óra végén feladatokat oldunk meg.

1. Az óra elején a diákok bemelegítésül különböző feltételeknek eleget tevő **gráfokat rajzolnak**. Háromféle feladatot oldanak meg. (5 perc)
2. Ha a diákok jól dolgoztak, akkor észrevehetik, hogy mindhárom feladatnak ugyanazok a gráfok a megoldásai, ezzel a fa ekvivalens definícióihoz jutunk. Defináljuk az erdőt is. (5 perc)
3. Utána a diákok egy **stratégias játékot** játszanak. (10 perc)
4. A játék kapcsán megfogalmazódhat a **fa élszámára** vonatkozó sejtés. Kimondjuk a tételt és be is bizonyítjuk. (15 perc)
5. Ha marad idő, az óra végén a diákok egyénileg vagy párban a tanult fogalmakat gyakoroltató **feladatokat oldanak meg**. (10 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Feladatok** nyomtatása
Fájlnév: [gráfelmélet_07_melléklet_fából_vaskarika_feladatok](#)

Az óra felépítése

1. Gráfok rajzolása (5 perc)

Tanár: A múlt órákon sok új fogalommal ismerkedtünk. Azt szeretném, ha ezeket gyakorolnánk gráfok rajzolásával. Háromféle feladatot fogok kiosztani közöttetek:

A feladata: Rajzold meg az összes olyan 5 csúcsú gráfot, amelyben nincs kör, de ha még egy élet berajzolnánk, már lenne benne kör. = Maximális körmentes gráf.

B feladata: Rajzold meg az összes olyan 5 csúcsú gráfot, amely összefüggő, de ha egy élet elhagynánk belőle, már nem lenne összefüggő. = Minimális összefüggő gráf.

C feladata: Rajzold meg az összes olyan 5 csúcsú gráfot, amely összefüggő, de nincs benne kör.

Hogy értem, hogy rajzoltátok meg az összeset?

Diák: Ne feledjük, hogy a gráfok gumiból vannak. Csak különböző (nem izomorf) gráfokat kell rajzolnunk.

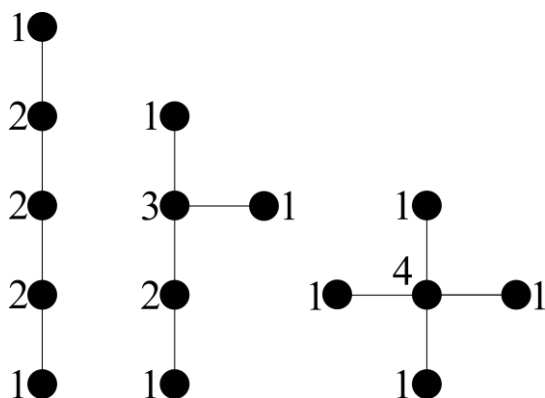
Módszertani megjegyzések: A feladatok kiosztása történhet valahogy ülésrend szerint, de ki is oszthatunk a diákok között A, B és C betűket.

Nehezebb (és időigényesebb) a feladat, ha 6 csúccsal adjuk fel.

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak. Kérdezzünk rá, hogy miért nincs több megoldás.

2. Fa, erdő fogalma (10 perc)

Tanár: Valaki az A csoportból rajzolja fel a megoldásait! Mit vesztek észre?



Diák: Én is ugyanezeket a gráfokat rajzoltam fel, pedig B/C voltam!

Tanár: Hát ez meg hogy lehetséges?

Diák: Mindhárom feltétel igazából ugyanazt jelentette.

Tanár: Szuper! Tehát mindhárom feltétel ugyanazokat a gráfokat adta meg. Ezeket a gráfokat **fának** nevezzük.

fa: összefüggő és körmentes gráf

De írhattam volna azt is, hogy maximális körmentes vagy minimális összefüggő. Sőt van egy további definíció is, ami az út fogalmát használja. Van ötleteitek?

Diák: Hogy bármely két csúcsa között van út?

Tanár: Nem, ez nem teljesen jó.

Diák: Ez az összefüggőség definíciója volt. Még az is kell, hogy körmentes, azaz csak egyféle út van két csúcs között.

Tanár: Igen, tehát az is jó definíció, hogy egy fa két csúcsa között pontosan egy út van.

Módszertani megjegyzések: Hasznos lehet, ha átbeszéljük, honnan lehetünk benne biztosak, hogy a fenti 3 db 5 csúcú fa van. Érdekes fokszámok szerint sorra venni őket.

Érdeklődőbb csoportban beszélgethetünk arról, hogy miért ekvivalensek a fenti definíciók. Alább olvasható néhány példa gondolatmenet:

- Ha egy gráf körmentes, de maximális, azaz már nem húzható be további él úgy, hogy körmentes maradjon, akkor szükségképpen összefüggő. Hiszen, ha nem lenne az, két komponens közé még lehetne élt behúzni, és ez az él biztosan nem halad át körön, hiszen a két komponens között nem volt út korábban.
- Ha egy gráf összefüggő, de minimális, azaz nem hagyható el további él úgy, hogy összefüggő maradjon, akkor szükségképpen körmentes. Hiszen, ha nem lenne az, egy körből még hagyhatnánk el élt úgy, hogy a gráf összefüggő maradjon, ugyanis a kör nem törölt élei továbbra is utat biztosítanak a törölt él végpontjai között.
- Ha egy gráf bármely két csúcsa között pontosan egy út van, akkor biztosan összefüggő, hiszen bármely két csúcsa között van út. Továbbá nem lehet a gráfban kör, hiszen akkor lenne olyan csúcspár, amelyek között több út vezet.
- Ha egy gráf összefüggő és körmentes, akkor maximális körmentes, mivel még egy élt behúzva, az biztosan kört hoz létre, hiszen a két csúcs között korábban is volt út az összefüggőség miatt.
- Ha egy gráf összefüggő és körmentes, akkor biztosan minimális összefüggő, mivel még egy élt elhagyva már biztosan nem lenne összefüggő, hiszen, ha összefüggő maradna, akkor az elhagyott él két végpontja között az elhagyott él nélkül is lenne út, ezt az elhagyott éllel kiegészítve kört kapnánk, de akkor a gráf nem lenne körmentes.
- Ha egy gráf összefüggő és körmentes, akkor biztosan van bármely két csúcsa között út (összefüggőség) és nem lehet két út is a csúcsok között, hiszen ez azt jelentené, hogy van a gráfban kör (a két út eltérő szakaszai együtt kört alkotnának), tehát a gráfban pontosan egy út van két csúcs között.

De térjünk vissza a gyakorlatba. Mire lehetnek jók, milyen területeken jelenhetnek meg a gráfelméleti fák?

Diákok: A családfák gráfelméleti fák./A döntési fával foglalkoztunk kombinatorika órán./A rendszertani törzsfák./A számítógép mappa és fájlrendszere fát alkot.

Tanár: Ezek a példák nagyon jók, mutatják, hogy érdemes lehet a fákkal behatóbban foglalkoznunk. Van még egy gráfelméleti fogalom, amit bevezetnék: az **erdő**. Mi lehet az?

Diák: Több fa összessége?

Tanár: Igen, de hogy lehetne precízebben meghatározni?

Diák: Az olyan gráfot, amelynek komponensei fák, erdőnek nevezzük.

Tanár: Szuper.

erdő: komponensei fák

Van esetleg javaslat másik megfogalmazásra?

Diák: A körmentes gráfot erdőnek nevezzük.

Tanár: Nagyon jó. És mit gondoltok, egyetlen fa erdőt alkot?

Diák: Igen, mert körmentes.

Tanár: Bizony, egy fa egy 1 komponensű erdő.

3. Stratégiás játék (10 perc)

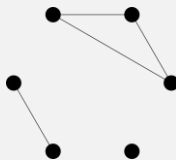
Tanár: Ismét játszani fogunk. Alkossatok párokat! A két játékos felváltva rajzol éleket 8 csúcs közé úgy, hogy a gráf körmentes maradjon. Az veszít, aki elsőként kört hoz létre.

Módszertani megjegyzések: A páralakítás történhet ülésrend szerint, de történhet sorsolással vagy elektronikus úton (pl. a <https://flippity.net/> oldal „random name picker” elemével).

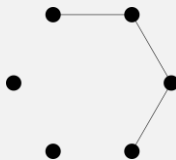
Sétáljunk körbe, hallgassuk meg az ötleteiket. Akik észrevették, hogy csak 7 élt lehet berajzolni és ezért mindig a kezdő játékos nyer, játszhatnak 9 csúccsal. Ha ezt is „megfejtették” (itt csak 8 él húzható be, így mindig a második játékos nyer), akkor játszhatják a következő játékokat:

Két játékos felváltva rajzol be éleket 6 csúcs közé úgy, hogy végig egyszerű maradjon a gráf. Az nyer, aki a kapott gráfot összefüggővé teszi. Itt már picivel bonyolultabb a nyerő stratégia megtalálása.

Ekkor 2. játékosnak van nyerő stratégiája: Elsőre az 1. játékos éléhez kapcsolódva húz be élt a 2. játékos. Utána a 2. lépésben az alábbi ábra kialakítására törekszik, ezután mindenképpen ő „köti be” az utolsó komponenst.



A fenti ábra csak akkor nem alakítható ki, ha az 1. játékos második lépése után az állás az alábbi:



Ekkor már csak három él húzható be anélkül, hogy csökkentené egy játékos a komponensek számát. Mivel a három páratlan és a 2. játékos következik, így ő fog nyerni.

Ezzel az 1. játékos elérte, hogy két páros elemszámú komponensből álljon a gráf, tehát nyerni fog.

4. A fa élszáma (10 perc)

Tanár: Mit vettetek észre a játék során?

Diák: Hogy 7 élt lehetett berajzolni úgy, hogy körmentes maradjon, azaz mindig a kezdő játékos nyert.

Tanár: És ehhez kellett valamilyen speciális stratégiát követnie?

Diák: Nem igazán, csak arra figyelnie, hogy ne alakítson ki kört.

Tanár: És miket rajzoltatok?

Diák: Körmentes gráfokat, azaz erdőket. A hetedik él behúzása után már maximális körmentes gráfot, azaz fát kaptunk.

Tanár: Ki tud megfogalmazni az eddigi tapasztalatok alapján valamilyen sejtést?

Diák: Hogy egy fának mindig 1-gyel kevesebb éle van, mint csúcsa.

Tanár: Igen: Egy n csúcsú fának $n - 1$ éle van. Ki tud a játék alapján érvelni a tétel igazsága mellett?

Diák: Kezdetben a gráfunk n komponensből állt. Egy él behúzásával 1 komponens szüntettük meg. (Nem rajzolhattunk meglévő komponensen belül élt, mert az kört eredményezett volna.) Összesen $n - 1$ komponens kell megszüntetni, tehát $n - 1$ élt kell behúzni.

Tanár: Ez nagyon szép gondolat.

Módszertani megjegyzések: A tétel bizonyítható teljes indukcióval is. Érdekes lehet ugyanakkor az alábbi „mesés” bizonyítást megbeszélni vagy akár eljátszani. (A bizonyítást szokás Hajós György nevéhez kötni, rá volt jellemző ilyen szemléletes érvelések megalkotása.)

Képzeljük el, hogy a fagraf egy város úthálózata a csúcsok közlekedési csomópontok. Mindegyik csúcsban áll egy csendőr, az egyikben a főcsendőr. Amikor a főcsendőr megfújja a sípját, akkor minden csendőr elindul felé. Az út egyértelmű, hiszen fáról van szó. Most képzeljük el, hogy minden csendőr megáll az első utca közepén, amire rálépett. Azt állítjuk, hogy minden utcán pontosan egy csendőr áll.

Ugyanis, ha lenne olyan utca, amin két csendőr áll, akkor lenne a gráfban kör (mert ellenkező irányba folytatnák az útjukat).

Hasonlóan, ha lenne olyan utca, amin nem áll csendőr lenne a gráfban kör (kiegészítve az utcával az utca végpontjaiból induló csendőrök útvonalát).

Tehát ugyanannyi utca van, mint csendőr: $n - 1$ (hiszen 1 csúcsban a főcsendőr áll).

5. Feladatmegoldás (8 perc)

Tanár: Ismét sok új fogalommal, gondolatmenttel ismerkedtünk meg. Ezeket tudjátok még gyakorolni a kiosztott feladatok megoldásával. Dolgozhattok egyénileg vagy párban!

Módszertani megjegyzés: Sétáljunk körbe, hallgassuk meg a diákok ötleteit, segítsünk az elakadóknak.

6. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán megismerkedtünk a fa és az erdő fogalmával. Kimondtuk és be is bizonyítottuk a fa élszámára vonatkozó tételt. Fejezzétek be otthon a feladatokat!

Mellékletek

Fák, erdők feladatok

Fájlnév: [gráfelmélet 07 melléklet fából vaskarika feladatok](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.