

VI. óra: Sétálunk, sétálunk

Az óra célja: Problémák átfogalmazása a gráfelmélet nyelvére, fa fogalmának előkészítése (kör, összefüggőség).

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf, izolált csúcs, gráf csúcsának fokszáma

Központi fogalmak: séta, út, kör, összefüggő gráf, komponensek

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Bogozódós játék	játék		5 perc
2.	Tanulságok megbeszélése	frontális megbeszélés		5 perc
3.	Feladatmegoldás	szakértői mozaik - szakértői csoportok	feladatlapok, drótok	10 perc
4.	Feladatok bemutatása egymásnak	szakértői mozaik – vegyes csoportok		10 perc
5.	Séta, út, kör, összefüggő gráf fogalma	frontális megbeszélés		13 perc
6.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán is fontos szerepet kap, hogy különböző problémákat átfogalmazzunk a gráfelmélet nyelvére, ezzel is ismételve a korábban tanult fogalmakat, szakkifejezéseket. Az Euler-(kör)sétához kötődő feladatokkal alapozzuk meg a séta, út, kör, összefüggőség fogalmát, amelyekkel előkészítjük a fa fogalmát, amiről a következő órán lesz szó.

1. Az óra elején bemelegítésül egy **játékot** játszunk, aminek le is vonjuk a tanulságait. (10 perc)
2. Utána a diákok szakértői mozaikban ismerkednek **Euler-(kör)sétához kötődő feladatokkal**. (20 perc)
3. Végül részletesen átbeszéljük a feladatmegoldásokhoz és a játékokhoz kötődő **fogalmakat: séta, út, kör, összefüggő gráfok**. (15 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Feladatok** nyomtatása a szakértői mozaikhoz, esetleg rövid (5-10 cm-es) **drótok** a „testépítő” csoportnak

Fájlnév: [gráfelmélet_06_melléklet_szakértői_mozaik](#)

Opcionális:

2. **Gyakorló feladatsor nyomtatása** a házi feladathoz.
Fájlnév: [gráfelmélet_06_melléklet_fogalomgyakoroltató_feladatok](#)
3. Ha van lehetőség **vetíteni**, akkor hasznos lehet az idő mérése látható formában, például a <https://pontosido.lovable.app/> oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Bogozódós játék (5 perc)

Tanár: Játsszunk bevezetésül egy játékot! Álljatok körbe, majd csukott szemmel mindenki óvatosan lépjen előre néhány lépést, és mindkét kezével fogjon meg egy-egy kezét. Miután már minden kéz fog egy másikat, kinyithatjátok a szemeteket, és az lesz a feladatotok, hogy kibogozzátok a „csomót” úgy, hogy tilos elengednetek egymás kezét.

Módszertani megjegyzés: Sok információt adhat számunkra a játék megfigyelése. Ki veszi kézbe a csoportból az irányítást, ki hogyan tartja be a szabályokat. Ha a gyerekek jól dolgoznak, akkor mindenképpen köröket kell kapniuk eredményül, ezek esetleg lehetnek egymásba „akadva”, ebben az esetben nem lehet teljesen „kibogozni” a csomót.

2. A játék tanulságainak megbeszélése (5 perc)

Tanár: Mi köze volt a játéknak ahhoz, amit tanulunk?

Diák: A játék során tulajdonképpen egy gráfot alkottunk.

Tanár: Hogy értve?

Diák: Mi voltunk a gráf csúcsai és a „kézfogásaink” a gráf élei.

Tanár: És mit szemléltetett a bogozódás?

Diák: Azt, amiről korábban beszéltünk, hogy a gráfok „gumiból” vannak, nem számít a csúcsok és élek konkrét elrendezése, csak az, hogy mely csúcsok vannak éllel összekötve és melyek nem.

Tanár: Szuper! Még milyen speciális tulajdonsága volt a játékban szereplő gráfnak?

Diák: Mivel mindannyian két kezünket nyújtottuk ki, ezért minden csúcs foka 2 volt.

Tanár: Igen, nagyon jó. És összesen hány éle volt a gráfnak?

Diák: Annyi, ahányan vagyunk.

Tanár: Miért?

Diák: Mert a bogozódás után kört/köröket kaptunk. Itt nyilvánvalóan ugyanannyi kézfogás van, mint személy.

Tanár: Nagyon jó! Tudunk emellett másképpen is érvelni?

Diák: Igen. Ha minden csúcs fokszáma 2, és n csúcs van, akkor a fokszámok összege $2n$. A múlt órán tanult tételt értelmében az élek száma ennek fele, azaz n .

3. Szakértői mozaik – feladatok megoldása (10 perc)

Tanár: 4 csoportot fogunk alakítani. Minden csoport kap egy feladatlapot. A feladatok megoldására 10 percek van. Mindenki törekedjen arra, hogy aktívan részt vegyen a csoport munkájában, mert utána új csoportokban el kell magyaráznotok a feladatokat és a megoldásaitokat egymásnak.

Módszertani megjegyzések

A csoportalakítás történhet elektronikus úton (pl. a <https://flippity.net/> oldal „random name picker” elemével, ezen belül a „jigsaw groups” opciót használva), de például franciakártya segítségével is. Egy 16 fős szakértői mozaikhoz érdemes a 16 figurát kiosztani (bubi, dáma, király, ász – mind a négy színből). Ebben a körben azok alkotnak egy csoportot, akik ugyanazt a színt húzták.

Ha kisebb létszámú a tanulócsoport, akkor is alakítsunk 4 csoportot. Ha pedig lényegesen nagyobb létszámú a csoport, akkor a szakértői mozaik két körben is megvalósítható, azaz két-két csoport ugyanazzal a feladattal foglalkozik. Törekedjünk arra, hogy ebben a körben a csoportok minél egyenlőbbek legyenek.

A csoportmunka során sétáljunk körbe, bizonyosodjunk meg arról, hogy minden csoport hozzákezdett a feladathoz, érti, hogy mit kell csinálni. Szükség esetén segítsünk kérdésekkel.

4. Szakértői mozaik – feladatok bemutatása (10 perc)

Tanár: Most új csoportokat fogunk alkotni úgy, hogy minden csoportba kerüljön egy diák minden csoportból. Mindenkinek 2 perce lesz arra, hogy bemutassátok egymásnak a megoldott feladatokat. A végén 2 percek lesz arra, hogy megfogalmazzátok, mi a közös a feladatokban!

Módszertani megjegyzések

Lehetséges módszer az új csoportok alakítására, hogy az eredeti csoport tagjai kiosztják maguk között az A, B, C és D betűket, majd az azonos betűket választók vannak egy csoportban. Vagy, ha az előbb franciakártyát használtunk, akkor most az azonos figurát húzók lehetnek egy csapatban.

5. Séta, út, kör, összefüggőség fogalma (13 perc)

Tanár: Kíváncsi vagyok, mire jutottatok, mi a közös a feladatokban?

Diák: A feladatokban tulajdonképpen gráfok szerepeltek.

Tanár: Ezt hogy értitek?

Diák: Hogy a feladatokban szereplő problémákat át lehet fogalmazni gráfelméleti problémára.

Tanár: Lássuk hogyan!

Diák1: A königsbergi hidaknál a hidak az élek, a városrészek a csúcsok.

Diák2: A rajzolás feladatban a vonalak a gráf élei, a vonalak találkozásai a csúcsok.

Diák3: A tróntermes feladatnál a termek a gráf csúcsai, a közöttük lévő ajtók az élek.

Diák4: A drótváz feladatban a testek csúcsai a gráf csúcsai, a testek élei a gráf élei.

Tanár: Ez nagyon izgalmas. És milyen további hasonlóság volt a problémákban?

Diák: Valamilyen szabály szerint végig kellett menni a gráf élein.

Tanár: Milyen szabály szerint?

Diák: Hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át.

Tanár: A drótváz kérdésnél is ez volt a feladat?

Diák: Nem teljesen, de ott is cél volt, hogy minél kevesebb „megszakítással” haladjunk át az éleken.

Tanár: Tanuljunk meg egy gráfelméleti fogalmat, hogy rendesebben tudjunk erről beszélni. A gráfokon lehet „utazni”. Ha elindulunk egy csúcsból és sorban egymáshoz csúcsban csatlakozó éleken megyünk végig, akkor sétálunk, azaz ez a csúcsokban csatlakozó élsorozat egy **séta**. (Tényleg ez a gráfelméleti szakkifejezés.)

A feladatokban egy nagyon speciális séta szerepelt – olyan, amelynek során minden élen végig kell haladni pontosan egyszer – ez az **Euler-séta**. Mit vettetek észre, mikor van Euler-séta egy gráfban?

Diák: Mi azt vettük észre, hogy a dolog a csúcsok fokszámán múlik.

Tanár: Milyen módon?

Diák: Nem lehet a gráfban kettőnél több páratlan fokszámú csúcs. Ezekből a csúcsokból kell indulnunk, illetve érkeznünk.

Tanár: Miért?

Diák: A köztes csúcsok mindegyikére igaz, hogy a séta során bemegyünk, majd ki is megyünk, azaz minden „látogatásunkkal” 2-vel nő a csúcs fokszáma.

Tanár: Remek. Meg tud-e valaki fogalmazni akkor egy szabályt?

Diák: Akkor létezik egy gráfban Euler-séta, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 2.

Tanár: Nem lehet más?

Diák: De 0 is lehet, ha visszaérünk a kiindulási csúcsba.

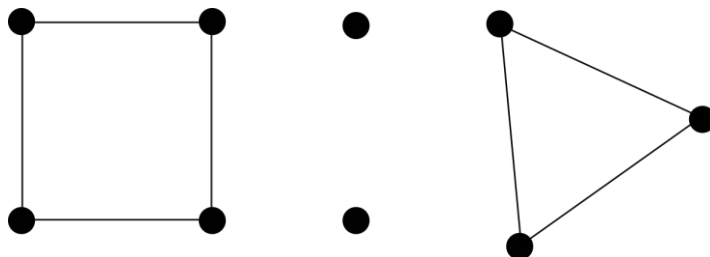
Tanár: És 1 nem lehet?

Diák: A fokszámok összege páratlan lenne!

Tanár: Szuper. Mi tehát a javított szabály?

Diák: Akkor létezhet egy gráfban Euler-séta, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

Tanár: Még mindig nincs teljesen igazatok. Tud-e valamelyikőtök olyan gráfot rajzolni, amelyben csupa páros fokszámú csúcs van, de nincs benne Euler-séta?



Módszertani megjegyzés: Ha nincs ötlet, akkor rajzoljon a tanár.

Tanár: Mi itt a probléma?

Diák: Hogy a gráf több darabból áll.

Tanár: Nagyon jó. Szükségünk van még egy fogalomra, az **összefüggőség** fogalmára, hogy ezt a problémát orvosolni tudjuk. Egy gráf összefüggő, ha bármely csúcsából bármelyik csúcsába el lehet jutni, azaz létezik közöttük séta. A nem összefüggő gráfok összefüggő komponensekből állnak.

A királyi palotáról szóló feladatban a trónterem nyilván elérhető volt a bejáratától. A gráfelmélet nyelvén mi erre a bizonyítékunk?

Diák: A bejárat csúcsából induló Euler-séta, ami a trónteremben végződik.

Tanár: Ha a királynak sietnie kell vagy éppen fáj a lába, akkor is ezt a kacskaringós sétát fogja megtenni?

Diák: Nem, nem tesz felesleges kitérőket, hanem a legrövidebb úton megy oda.

Tanár: Így van! Egy gráfban, ha sorban egymáshoz csúcsban csatlakozó éleken megyünk végig úgy, hogy nem ismételünk csúcsokat (és éleket), akkor egy utat teszünk meg. Tényleg ez a gráfelméleti definíciója az **útnak**.

Mit gondoltok, az út egyben séta is?

Diák: Igen, de nem minden séta lesz út.

Tanár: És ha két csúcs között van séta, akkor van út is?

Diák1: Persze, a felesleges kanyarokat elhagyjuk.

Diák2: Pontosabban, ha egy olyan csúcsba érünk, ahol már voltunk, úgy a kettő látogatás közti sétát töröljük.

Tanár: Rajzoljunk egy példát, hogy szemléletesebb legyen.

...

Ezek alapján mit tudnátok megfogalmazni az út és az összefüggőség kapcsolatáról?

Diák: Egy gráf pontosan akkor összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út.

Tanár: Így van, így szokás az összefüggőséget definiálni.

Most már készen állunk rá, hogy helyes szabályt fogalmazzunk meg az Euler-sétára vonatkozóan. Ki próbálja meg?

Diák: Egy összefüggő gráfban akkor létezik Euler-séta, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2.

Módszertani megjegyzések:

Teljesen pontosan így szólna a tétel: Egy összefüggő gráfban pontosan akkor létezik Euler-séta, ha a páratlan fokszámú csúcsok száma 0 vagy 2. A korábban a beszélgetésben elhangzó érvelés igazából csak a fokszámokról szóló feltétel szükségességét igazolja. Azt, hogy ez elégséges feltétel is, picit hosszadalmasabb bizonyítani. Matematika iránt érdeklődőbb csoportban érdemes lehet ezekre (szükséges és elégséges feltétel, precízebb kimondás és bizonyítás) időt szánni. Ehhez lehetséges forrás: https://www.cs.bme.hu/~lazsa/sza2022/otodik_eloadas_SZA22.pdf

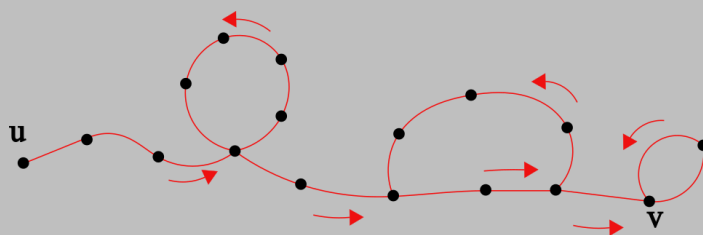
Tanár: Ma már megbeszéltük a gráfelméleti séta és út fogalmát. Az óra eleji bogozódás során is előjött egy speciális fogalom, csak akkor még nem mondtam, hogy ez is gráfelméleti szakkifejezés. Ez a **kör**. Mi lehet az?

Diák: Olyan út, ami visszatér a kiindulási pontba?

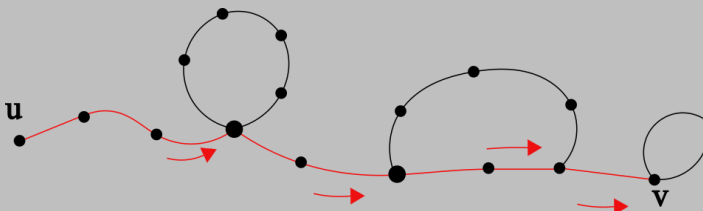
Tanár: Igen, olyan út, aminek kezdő és végpontja megegyezik.

Zárásul szedjük össze a tanult fogalmakat!

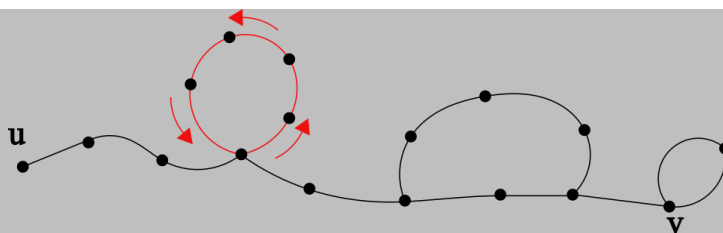
- **séta:** csúcsokban csatlakozó élsorozat



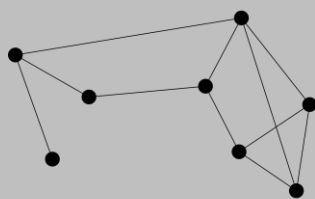
- **út:** olyan séta, amely nem halad át kétszer ugyanazon a csúcson



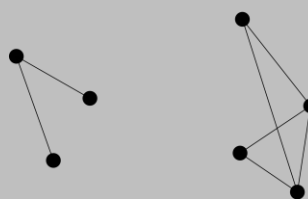
- **kör:** olyan út, amelynek kezdő és végpontja ugyanaz



- **összefüggő gráf:** bármely két pontja között van út
 - a nem összefüggő gráfok összefüggő **komponensekből** állnak



példa összefüggő gráfra



példa nem összefüggő,
két komponensű gráfra

Módszertani megjegyzés: Ha az előző órán volt szó a Hamilton-körről is, akkor érdemes lehet időt szánni a Hamilton-út/kör és az Euler-séta/körséta összehasonlítására például az alábbiak szerint:

Szempont	Hamilton-út/kör	Euler-séta/körséta
Cél	Minden csúcson egyszer átmenni.	Minden élen egyszer átmenni.
Analógia	Futár (minden házba be kell dobni a csomagot).	Hókotró (minden utcát le kell takarítani).
Nehézség	„Nehéz”: nincs általános recept.	„Könnyű”: csak a fokszámokat nézzük.

6. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán megismertedtünk a séta, Euler-séta, út, kör, összefüggőség fogalmával. Ezekhez kötődnek a kiosztott gyakorlófeladatok is.

Mellékletek

Feladatok a szakértői mozaikhoz

Fájlnév: [gráfelmélet o6 melléklet szakértői mozaik](#)

Gyakorló feladatsor a házi feladathoz.

Fájlnév: [gráfelmélet o6 melléklet fogalomgyakoroltató feladatok](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.