

V. óra: Barangoló

Az óra célja: Egy gráfelméleti tétel kimondása és precíz bizonyítása, játékok a következő órai fogalmak előkészítésére.

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf, hurokél, párhuzamos él, gráf csúcsának fokszáma, fokszámtétel, skatulyaelv

Központi fogalmak: fokszámok, bejárások, összefüggő gráf

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Különböző fokszámok	frontális megbeszélés, pármunka	„lyukas” bizonyítások tábla, kréta	20 perc
2.	Barangoló játékok	forgószínpad	mértani testek, gráfok, „sakktáblák”	18 perc
3.	Megbeszélés	frontális megbeszélés		5 perc
4.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Az óra első részében bebizonyítjuk, hogy egy (legalább kétcsúcsú) egyszerű gráfban biztosan van legalább két azonos fokszámú csúcs. Utána játékos feladatokkal ismerkednek a diákok a Hamilton-körökkel. Fontos cél, hogy különböző problémákat átfogalmazzunk a gráfelmélet nyelvére, ezzel is ismételve a korábban tanult fogalmakat, szakkifejezéseket.

1. Az óra elején a múlt óra végén kiadott feladatok kapcsán megbeszéljük, hogy **minden legalább kétcsúcsú egyszerű gráfban van két azonos fokszámú csúcs**. A precíz bizonyítás elvégzéséhez a diákok egy „lyukas” bizonyítást töltenek ki. (20 perc)
2. Ezután **forgószínpados** módszerrel a diákok három állomáson játszanak.
3. Végül **megfogalmazzuk, hogy mi volt közös a játékokban**, előkészítjük az összefüggőség fogalmát.

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. „Lyukas” bizonyítások nyomtatása, felvágása
Fájlnév: [gráfelmélet 05 melléklet bizonyítás](#)
2. **Mértani testek** előkészítése (jó, ha van közöttük kocka, téglatest, tetraéder, oktaéder, dodekaéder, hasáb, gúla), **négyzethálós lapok**, illetve **az állomások leírásának és a gráfbarangolós ábrák** nyomtatása a forgószínpadhoz
Fájlnév: [gráfelmélet 05 melléklet forgószínpad](#)

Az óra felépítése

1. Különböző foksámok (20 perc)

Az óra elején megbeszélünk néhány feladatot, feladatrészletet, gondolatot az előző feladatlapról. A következő párbeszédék fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmaznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallni abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot.

Tanár: Szeretnék beszélgetni a múlt óra végén kiadott feladatlap feladatainak egy részéről. Mi volt a közös a feladatokban?

Diák: Mindegyik arról szólt, hogy létezik-e adott foksámú csúcsokkal rendelkező gráf.

Tanár: Nagyon jó. Mire kérdezett rá a 3. feladat?

Diák: Hogy létezik-e olyan 3 csúcsú, illetve 8 csúcsú gráf, amelyben a csúcsok foksámjai mind különböznek.

Tanár: Nem kell valamivel még kiegészíteni ezt?

Diák: A feladat szövege alapján egyszerű gráfokról van szó. Senki sem fogott önmagával kezét, tehát nincs a gráfban hurokél, és két személy legfeljebb egyszer fogott kezét, így párhuzamos élek sincsenek.

Tanár: És meg tud-e valaki fogalmazni a feladat tanulságai alapján egy sejtést?

Diák: Egy egyszerű gráfban nem lehet minden csúcs foksáma különböző.

Tanár: Vagy másképpen megfogalmazva?

Diák: Egy egyszerű gráfban biztosan van két azonos foksámú csúcs.

Tanár: Nagyon jó. Ezt a sejtést fogjátok most párokban bebizonyítani. Leírtam a bizonyítást egy lapra, de kihagytam belőle részeket. Kiosztom ezt a lyukas szöveget, próbáljátok meg beírni a megfelelő szavakat, számokat kifejezéseket. 5 perctek van erre!

Módszertani megjegyzés: A párok lehetnek az egymás mellett ülő tanulók, de dolgozhatunk véletlenszerű párokkal is, ehhez használhatjuk például a <https://flippity.net/> „Random name picker” alkalmazását. Ha páratlan számú diákunk van, akkor az egyik csoport lehet háromfős.

A tétel bizonyításának kiegészítése nem csak logikus gondolkodást igényel, de a szövegértési kompetenciákat is fejleszti.

Jó matematikai felkészültségű csoportokban egyéni munkában is kiadható.

Járjunk körbe, segítsünk az elakadó pároknak.

Tanár: Beszéljük meg, mire jutottatok! Mi helyesen a tétel?

Diák: Minden egyszerű gráfban létezik két azonos foksámú csúcs.

Módszertani megjegyzés: Később még pontosítani fogjuk a tételt.

Tanár: Jó. Tekintsünk egy n csúcsú egyszerű gráfot. Mik a lehetséges fokszámok ebben a gráfban.

Diák: A legkisebb 0. A legnagyobb $(n - 1)$. Köztük bármi lehet.

Tanár: Pontosítanád ezt?

Diák: Bármilyen egész szám.

Tanár: Ez összesen hányféle fokszám?

Diák: n -féle.

Tanár: Akkor hol itt a probléma: pont ugyanannyiféle fokszám van, ahány csúcs?

Diák: 0 és $(n - 1)$ fokú csúcs nem lehet a gráfban egyszerre, hiszen az utóbbi az összes többi csúccsal össze lenne kötve, azaz nem lehetne a gráfban izolált csúcs. Így viszont már csak $(n - 1)$ -féle fokszám maradt az n csúcsra.

Tanár: Szuper. Ki emlékszik, hogyan neveztük azt az elvet, amit alkalmazunk a bizonyítás végén?

Diák: Skatulyaelvnek.

Tanár: Igen. Ha több gyufaszál van, mint skatulya, akkor kell lennie olyan skatulyának, amiben legalább két gyufaszál van. Mik voltak a bizonyításunkban a skatulyák?

Diák: A lehetséges fokszámok.

Tanár: És mik voltak a gyufaszálak?

Diák: A gráf csúcsai.

Tanár: Olvassa fel valaki a kész szöveget!

...

Tanár: Felfedeztünk és közösen bebizonyítottunk egy tételt, ez szép eredmény. Most már csak az a kérdés miért nem igaz a tétel...

Diák: Hogyhogy nem igaz, most bizonyítottuk be!?

Tanár: Van olyan nagyon speciális gráf, amire nem teljesül. Nincs benne két azonos fokszámú csúcs, mert...

Diák: Ja! Nincs is benne két csúcs, mert csak egy csúcsa van.

Tanár: Igen, az egycsúcsú üres gráfra nem igaz a tétel. De hol bukik meg az iménti bizonyítás?

Diák: A 0 és az $n - 1$ fokszám itt ugyanaz és szerepelhet egyszerre, ezért itt nem igaz, hogy kevesebb fokszám használható, mint ahány csúcs van: egyféle fokszám és egyetlen csúcs van.

Tétel: És kétcsúcsú gráfra már jó az okoskodásunk?

Diák: Igen. Itt a 0 és 1 nem szerepelhet együtt, így vagy mindkét csúcs foka 0, vagy mindkettőé 1.

Tanár: Remek. Abbahagytam a köztöködést. Hogyan szól akkor a tétel teljesen precízen?

Diák: Minden legalább kétcsúcsú egyszerű gráfban létezik két azonos fokszámú csúcs.

Tanár: Térjünk vissza a feladatokhoz. Mit gondoltok ezek fényében a 4-es feladatról?

Diák: Épp az imént bizonyítottuk be, hogy nincs ilyen gráf.

Tanár: Senki sem tudott rajzolni?

Diák: De, én igen.

Tanár: Hát az meg hogy lehet?

Diák: A feladat nem mondta, hogy egyszerű gráfról van szó. Hurokélekkel könnyedén megoldható a feladat.

Tanár: Bizony. Fontos, hogy mindig figyeljünk rá, hogy a feladat szövege pontosan milyen feltételeket fogalmaz meg a gráfokra vonatkozóan. Az imént megbeszélt tétel csak egyszerű gráfokra igaz.

És létezik-e olyan gráf, amelyben a csúcsok fokszámai rendre 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Diák: Nem, mert itt nem teljesül a fokszámtétel, a fokszámok összege páros.

Tanár: És a fokszámtétel nem csak egyszerű gráfokra igaz?

Diák: Nem, az minden gráfra teljesül, hiszen minden él (így a hurokél is) kettővel növeli a fokszámok összegét.

Módszertani megjegyzés: Ha szükségesnek érezzük részletesebben is átbeszélhetjük a feladatlap egyes feladatait.

2. Barangoló játékok (18 perc)

Tanár: Egy kicsit játszani fogunk. Három nagyjából egyenlő létszámú csoportra foglak titeket osztani. Három állomáson kell küldetéseket megoldanotok. A három állomás:

1. Testbarangoló
2. Gráfbarangoló
3. Huszárbarangoló

Egy állomáson 5 perccel lesz, utána forgunk. Egyénileg vagy párban dolgozzatok!

Módszertani megjegyzések: A csoportok kialakítására használhatunk bármilyen sorsolóeszközt (pl. franciakártyát) vagy például <https://flippity.net/> „Random name picker” alkalmazását. Adjunk egyértelmű utasítást, hogy melyik csoport hová menjen. Ha van rá lehetőség, vetítsük ki a rendelkezésre álló időt. Forgáskor adjunk egyértelmű utasítást a forgásirányra vonatkozóan.

Sétáljunk körbe, figyeljük meg a diákokat, hallgassuk meg az ötleteiket.

3. Megbeszélés (5 perc)

Tanár: Mi köze volt a játékoknak a gráfokhoz?

Diák: Tulajdonképpen az volt a kérdés, hogy bejárhatók-e egy gráf csúcsai az éleken mozogva úgy, minden csúcsban pontosan egyszer járunk, majd visszatérünk a kiindulási csúcsba.

Tanár: Hol voltak itt gráfok? Jó, a 2. állomáson nyilvánvaló, de a többi esetében?

Diák: Az 1. állomáson a test csúcsai voltak az csúcsok és az élei az élek.

Tanár: És a 3. állomáson?

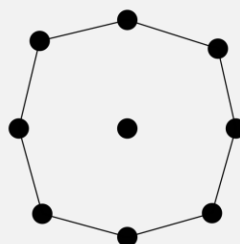
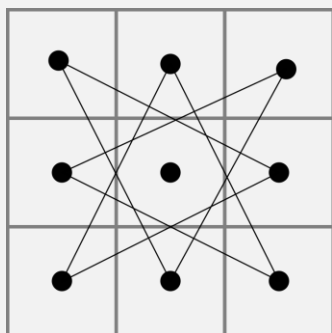
Diák: A 3. állomáson a sakktábla mezői a csúcsok.

Tanár: És az élek?

Diák: Egy csúccsal azok a csúcsok vannak összekötve, amelyekre az adott csúcsból a huszár lólépésben rá tud lépni.

Tanár: Igen, így van.

Módszertani megjegyzés: Ha hasznosnak találjuk, akkor megrajzolhatjuk például a 3×3-as sakktáblának megfelelő gráfot:



Tanár: Az olyan barangolásokat egy gráf élei mentén, amelyek minden csúcsot pontosan egyszer érintenek, majd visszatérnek a kiindulási csúcsba **Hamilton-körnek** nevezzük.

Sir William Rowan Hamiltonról kapta nevét, aki 1859-ben egy olyan játékot hozott forgalomba, amelynek a lényege az volt, hogy egy előre megadott gráf csúcspontjait kellett bejárni úgy, hogy minden csúcsban pontosan egyszer kellett járni.

A 2. állomáson megtapasztalhattátok, hogy vannak gráfok, amelyekben nincs Hamilton-kör. Mi volt a gond az 1. gráfnál?

Diák: Hogy a gráf egyik feléből a másikba csak a „középső” csúcson keresztül lehet átmenni, és így ott mindenképpen többször kell járni a barangolás során.

Módszertani megjegyzés: Ha érdeklődő a csoport beszélhetünk a 2. állomás további olyan gráfjairól, amelyekben nincs Hamilton-kör.

Tanár: Nagyon jó. Tudunk további példát adni olyan gráfra, amelyben biztosan nincs Hamilton-kör?

Diák 1: Hát, ha van benne izolált csúcs.

Diák 2: Vagy ha van két különálló része, amelyek között nincs él.

Tanár: Nagyon jó. Tulajdonképpen azt fogalmaztátok meg, hogy a gráf nem eshet szét részekre, szakszóval **összefüggőnek** kell lennie. A jövő órán majd precízebben meghatározzuk ezt a fogalmat. Remélem, élveztétek a barangolást, de érdekelne, hogy tudtok-e mondani valamilyen gyakorlati alkalmazást Hamilton-körökre.

Diák: Például a futár, ahogy viszi ki a csomagokat. Persze az nem baj, hogyha kétszer is jár egy helyen...

Tanár: Nagyon jó a példa. Valóban, a Hamilton-kör létezésének kérdése speciális esete a széles körben felmerülő utazó ügynök problémájának. Egy ügynöknek kell meglátogatnia bizonyos városokat, és végül haza kell érnie. Adott, hogy valamelyik városból egy másik városba milyen költséggel tud eljutni (repülőjegy ára, autótút ára stb.). Szeretné az utak összköltségét minimalizálni. Ez a feladat sok alkalmazás során felmerül, és csak bizonyos speciális esetekben ismeretesebbek jó algoritmusok a megoldására.

4. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán bebizonyítottuk, hogy minden egyszerű gráfban vannak azonos fokszámú csúcsok, majd Hamilton-körökkel foglalkoztunk! Akinek tetszett ez a téma, foglalkozhat a kiosztott szorgalmi feladatok megoldásával.

Mellékletek

„Lyukas” bizonyítás

Fájlnév: [gráfelmélet_05_melléklet_bizonyítás](#)

Forgószínpad

Fájlnév: [gráfelmélet_05_melléklet_forgószínpad](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.