

IV. óra: Fokszámok

Az óra célja: A fokszámtétel felfedezése.

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf, gráf csúcsának fokszáma

Központi fogalmak: fokszámtétel

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Feladatok megbeszélése	frontális megbeszélés		10 perc
2.	A fokszámtétel felfedezése	pármunka vagy csoportmunka	ismeretséges feladatok	15 perc
3.	A fokszámtétel megbeszélése	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
4.	Feladatmegoldás	egyéni vagy páros munka	fokszámtétel feladatlap	8 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Az óra első részében rövid ismételés után a diákok feladatokon keresztül felfedezik a fokszámtételt. Ezután további feladatokat oldanak meg.

1. Az óra elején megbeszéljük a múlt óra végén kiadott **feladatlap** tanulságait. (10 perc)
2. Ezután a diákok **ismeretséges feladatokat oldanak meg**. A feladatok megoldása segíti a fokszámtétel felfedezését. (15 perc)
3. Közösén megbeszéljük a feladatok tapasztalatait, a **fokszámtételt**. (10 perc)
4. Az óra maradék részén a **fokszámtétellel kapcsolatos feladatokat** oldanak meg a diákok. (10 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Ismeretséges feladatok** nyomtatása, felvágása (páronként/csoportonként 1 példány)
Fájlnév: [gráfelmélet 04 melléklet ismeretséges feladatok](#)
2. **Fokszámtétel feladatlap** nyomtatása
Fájlnév: [gráfelmélet 04 melléklet fokszámos gyakorlófeladatok](#)

Az óra felépítése

1. Ismétlés (10 perc)

Az óra elején megbeszélünk néhány feladatot, feladatrészletet, gondolatot az előző feladatlapról. A következő párbeszédetek fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmaznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallni abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot. (Csak azokról a feladatokról beszéljünk, amiket hasznosnak érzünk a csoport szempontjából.)

Tanár: Szeretnék beszélgetni a múlt óra végén kiadott feladatlap feladatainak egy részéről. Nézzük először az első feladatot.

1. Az Anonymus-csoport matematikusai gyűlést tartanak. A mostani találkozón Erdős Pál, Turán Pál, Grünwald Géza, Klein Eszter, Szekeres György és Gallai Tibor vesznek részt, egyszerre több problémán is dolgoznak. Tudjuk, hogy a találkozó során történt egyeztetés

- Szekeres, Turán és Erdős között,
- Klein beszélgetett Erdőssel,
- Gallai megmutatta az egyik bizonyítását Erdősnek és Turánnak,
- Grünwaldnak el kellett sietnie, de a két Pállal megvitattott egy problémát,
- miközben Szekeres hallgatta Kleint, eldöntötte, hogy feleségül fogja venni.

a) Eddig kivel nem beszélgetett Turán?

b) Van, aki mindenkivel matekozott már?

c) Van olyan négyes, hogy köztük mindenki mindenkivel egyeztetett? Ha igen, kik? Ha nem, akkor melyik páros(ok) beszélgessen(ek), hogy legyen?

d) A nap végén mindenki kézfogással búcsúzik mindenkitől. Hány kézfogás történik? (Értelemszerűen Grünwald már nem vesz részt ebben.)

Mi köze ennek a feladatnak a múlt órákon tanultakhoz?

Diák: Érdekes volt gráfon szemléltetni a csoport munkáját. A matematikusok voltak a gráf csúcsai, az élek pedig a köztük zajló egyeztetéseket jelölték.

Tanár: Nagyon jó! Hány csúcsú ez a gráf?

Diák: 6

Tanár: Fogalmazzuk át a **b)** kérdést a gráfelmélet nyelvére! Használjuk a „fokszám” kifejezést!

Diák: Van a gráfban 5 fokszámú csúcs?

Tanár: És hogyan hangozna a **c)** kérdés első fele?

Diák: Van a gráfban olyan rész, amely 4 csúcsú teljes gráf?

Módszertani megjegyzés: Természetesen a válaszokat is megbeszélhetjük, ha hasznosnak érezzük. Érdekes lehet átfogalmazást kérni a 2. és 3. feladatra is. (A 3. feladatnál egyáltalán nem nyilvánvaló, hogyan jön létre a teljes gráf.)

Tanár: Kíváncsi lennék még a 4. feladatra. Ott mi a kérdés a gráfelmélet nyelvén?

4. Hányan vettek részt az iskolai pingpong bajnokságon, ha mindenki játszott mindenkivel, és összesen 66 mérkőzés zajlott le?

Diák: Hány csúcsú az a teljes gráf, amelynek 66 éle van?

Tanár: Hogyan kellett ennél a feladatnál gondolkodni?

Diák: Fel kellett írni egy egyenletet: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66$.

Tanár: Remek.

Módszertani megjegyzés: Ha nem tanulták még a másodfokú egyenleteket, akkor ezt az egyenletet csak próbálgatással tudják megoldani: keressük azt a számot, amit a nála 1-gyel kisebb számmal megszorozva 132-öt kapunk.

Tanár: Nézzük meg az 5. feladatot is! Ki tudja, hogy 8 csapat kieséses bajnokságán hány mérkőzés van?

5. Márk és Janó a foci EB lebonyolítási rendszere kapcsán beszélgetnek.
- Jobban örülnék, ha a jelenlegi kieséses rendszer helyett, inkább mindenki mindenkiel játszana a legjobb nyolc között. – mondja Janó.
 - Az rengeteg! Úgy több, mint négyszer annyi mérkőzés lenne. – vágja rá Márk.

Igaza van Márknak?

Diák: 7.

Tanár: Miért?

Diák: Először a nyolc között 4 meccset kell játszani, utána a négy között 2-t, és még 1-et, a döntőt.

Tanár: Nagyon jó. Van-e, aki másképpen gondolkodott?

Diák: Ahhoz, hogy meglegyen a győztes, 7 csapatnak kell kiesnie...

Tanár: Ez nagyon szép ötlet, érdemes megjegyezni. Utolsóként még nézzünk rá a hatodik feladatra is. Ki jött rá a turpisságra?

Diák: Először lehetett azt gondolni, hogy itt is csak ki kellett számolni a 6 csúcsú teljes gráf élszámát, de itt igazából nem kell osztani 2-vel, hiszen mindenki 5-öt lő, nem számoltunk egyetlen lövést sem kétszer.

Tanár: Valóban: különböző lövés, ha A lő B-re, illetve B lő A-ra. A lövedékek száma a lehetséges kapcsolatok számának kétszerese.

2. A fokszámtétel felfedezése (15 perc)

Tanár: A következő feladat során párban fogtok dolgozni. Az alaphelyzet az, hogy van 6 személy, akik közül néhányan ismerik egymást. Az ismeretségeket kölcsönösnek tételezzük fel. Mindenki felírja egy lapra, hogy hány személyt ismer. Lehetségesek-e a következők eredmények?

Kaptok papírcsíkokon többféle választ is. A páron belül osszátok el egymás között a csíkokat. Ha lehetséges a csíkon szereplő válasz, akkor adjátok meg, hogyan. Ha nem lehetséges, akkor indokoljátok meg, hogy miért nem.

Ha elkészültetek, mondjátok el egymásnak a megoldásaitokat és csoportosítsátok a feladatokat a megoldás módszere szerint, azaz a hasonló gondolatmenettel megoldott feladatok kerüljenek egy csoportba!

Módszertani megjegyzések: Párok helyett dolgozhatnak a diákok 3-4 fős csoportokban is. Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak.

3. A fokszámtétel megbeszélése (10 perc)

Tanár: Mi köze volt a feladatoknak a gráfokhoz?

Diák: Tulajdonképpen az volt a kérdés, hogy léteznek-e bizonyos típusú 6 csúcsú gráfok.

Tanár: Hogy érted, hogy „bizonyos típusú”?

Diák: Amelyekben a fokszámok a felsorolt számok.

Tanár: Nem kell még valamit hozzátenni?

Diák: Egyszerű gráfoknak kell lenniük a feladat szövege miatt.

Tanár: Így van. Na, hogyan csoportosítottátok a feladatokat?

Diák: Voltak azok, amelyek lehetségesek voltak, azaz léteztek a megfelelő gráfok.

Tanár: Ezeknél hogyan mutattátok meg, hogy léteznek?

Diák: Lerajzoltuk őket.

Tanár: Remek. Aztán?

Diák: Voltak olyanok, amik azért nem működtek, mert nem voltak jók a számok.

Tanár: Ezt hogy érted?

Diák: Hát például, ha van olyan, aki 5 személyt ismer, akkor nem lehet olyan, aki nem ismer senkit sem. Azaz a megadott számok között nem szerepelhet 0 és 5 egyszerre.

Tanár: Nagyon jó. Volt még másfajta gondolatmenet is?

Diák: Mi észrevettük, hogy azok az esetek, amelyeknél a számok összege páratlan, nem lehetségesek.

Tanár: Miért?

Diák: Azért, mert az ismeretségeket kölcsönösnek tételeztük fel, azaz egy ismeretséget ketten is mondanak. / Azért, mert minden élhez két csúcs tartozik, azaz minden él 2-vel növeli a fokszámok összegét.

Tanár: Nagyon jó. Meg tudja fogalmazni valaki ezt az értékes észrevételt a gráfelmélet nyelvén?

Diák1: Egy gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Diák2: Egy gráfban a fokszámok összege páros.

Tanár: Hogyan lehet gyorsan ellenőrizni, hogy páros-e a fokszámok összege?

Diák: Elég a páratlan fokszámú csúcsok számát ellenőrizni. Páros számúnak kell lennie!

Tanár: És, ha páros a fokszámösszeg, akkor biztosan létezik megfelelő gráf?

Diák: Nem, ez önmagában nem elég. Van olyan példánk, ahol páros az összeg, mégsem létezik a gráf.

Tanár: Ezt úgy is mondjuk, hogy a páros fokszámösszeg szükséges, de nem elégséges feltétel adott fokszámsorozattal bíró gráf létezésére.

Írjuk is fel az összegyűjtött megállapításokat!

Fokszámtétel: Egy gráf fokszámainak összege az élek számának kétszerese.

Következmények:

1. Egy gráfban csúcsok fokszámainak összege páros szám.
2. Egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma páros.

Módszertani megjegyzés: Ha volt a feladatmegoldás során visszatérő nehézség, akkor arra érdemes a megbeszélés során részletesen is kitérni, ha van rá idő.

4. Feladatmegoldás (8 perc)

Tanár: Gyakoroljuk egy kicsit az eddigieket! Kiosztok egy feladatlapot. Próbáljatok meg minél több feladatot megoldani. Dolgozhattok egyénileg vagy párban!

Módszertani megjegyzések: Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán kimondtuk a fokszámtételt, majd alkalmaztuk feladatok megoldása során. Fejezzétek be otthon a feladatokat!

Mellékletek

Ismeretséges feladatok

Fájlnév: [gráfelmélet 04 melléklet ismeretséges feladatok](#)

Fokszámtétel feladatlap

Fájlnév: [gráfelmélet 04 melléklet fokszámos gyakorlófeladatok](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.