

III. óra: Teljes gráf

Az óra célja: A teljes gráf élszámának meghatározása.

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf, sokszögek átlóinak számára vonatkozó összefüggés

Központi fogalmak: teljes gráf, gráf csúcsának fokszáma

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Ismétlés	frontális megbeszélés		7 perc
2.	Húzzunk bele!	pármunka	üres lapok	8 perc
3.	A teljes gráf éleinek száma	frontális megbeszélés	tábla, kréta	15 perc
4.	Feladatmegoldás	egyéni munka	teljes gráf feladatlap	8 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Az órán ismétlés után a teljes gráf élszámával foglalkozunk.

1. Az óra elején ismétlünk, ennek során visszautalunk a térképek színezésére, síkgráfokra. (5 perc)
2. Majd **versenyt** hirdetünk: legfeljebb hány él rajzolható be egy egyszerű 4, 5, 6, 7, ... csúcsú gráfba úgy, hogy síkgráf maradjon? (8 perc)
3. Utána többféle módszerrel is **megszámoljuk a teljes gráf éleinek számát.** (15 perc)
4. Ezután a diákok a tudásuk elmélyítése érdekében **feladatokat oldanak meg.** (10 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Feladatlap** nyomtatása
Fájlnév: [gráfelmélet_03_melléklet_teljes_gráf_feladatok](#)

Opcionális:

2. **Üres lapok** a versenyhez

Az óra felépítése

1. Ismételés (7 perc)

A következő párbeszédék fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmaznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallani abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot.

Tanár: Nézzük a következő feladatot: Rajzolj olyan térképet, amelyen 4 ország szerepel, és mindegyik szomszédos az összes többivel! Akinek sikerült, az gondolkodjon el rajta, hogy lehet-e ugyanilyen térképet rajzolni 5 országgal!

Módszertani megjegyzés: Ha nem adtuk fel házi feladatnak ezt a feladatot, akkor érdemes néhány percet hagyni arra, hogy a diákok gondolkodjanak rajta.

Mi köze ennek a feladatnak az előző óra anyagához?

Diák: A múlt órán térképeket színeztünk.

Tanár: És ki emlékszik, hogy ennek mi köze volt a gráfokhoz?

Diák: Minden térképnek megfeleltethető egy síkbarajzolható gráf.

Tanár: Nagyon jó. Ki tudja átfogalmazni a gráfelmélet nyelvére a feladatot?

Diák: Rajzold síkba a 4 csúcsú teljes gráfot!

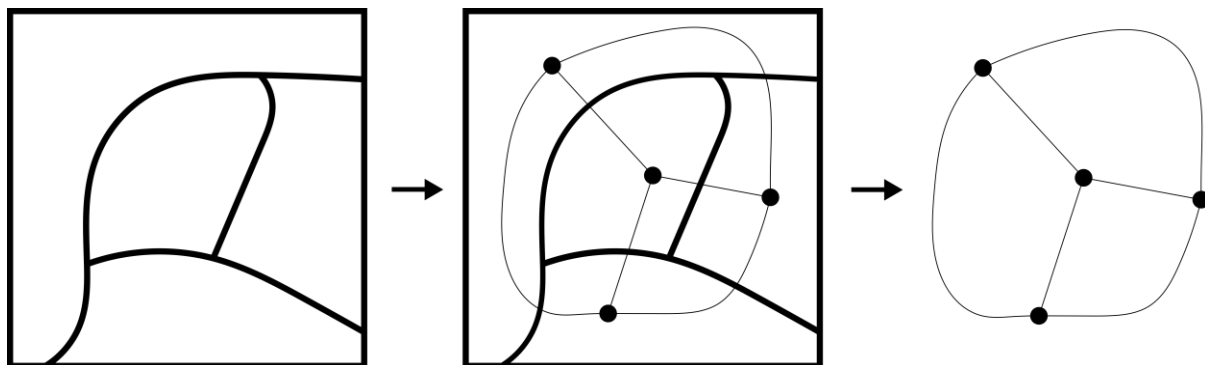
Tanár: Mit nevezünk teljes gráfnak?

Diák: Olyan egyszerű gráfot, amelyre igaz, hogy bármely két csúcsa össze van éllel kötve.

Tanár: És? Síkba lehet rajzolni a 4 csúcsú teljes gráfot?

Diák: Múlt órán láttuk, hogy igen.

Módszertani megjegyzés: Jó, ha a megbeszélés során olyan ábrát készítünk, ahol látszik, hogy feleltethető meg egymásnak a 4 megfelelő országból álló térkép és a 4 csúcsú teljes gráf.



Tanár: És a második kérdés hogyan szólna gráfokkal megfogalmazva?

Diák: Síkbarajzolható-e az 5 csúcsú teljes gráf?

Tanár: És mit gondoltok? Síkbarajzolható? Kinek sikerült? ... Senkinek sem sikerült? Akkor biztosan tudjuk, hogy nem lehet síkbarajzolni?

Diák: Lehet, hogy csak nem voltunk elég ügyesek.

Tanár: Bizony. Az, hogy nem tudtátok lerajzolni még nem bizonyíték. Találjuk ki együtt, hogy miért nem lehet! Tegyük fel, hogy sikerülne rajzolni ilyen gráfot, azaz megfelelő térképet is. Hány szín kellene a színezéséhez?

Diák: 5, mert minden országnak van 4 szomszédja, amelyek egymással is szomszédosak.

Tanár: Bizony. És akkor mi van?

Diák: Akkor nem lenne igaz a négyszíntétel.

Tanár: Nagyon jó. Az ilyen gondolatmenetet indirekt érvelésnek nevezzük. Feltettük, hogy síkba lehet rajzolni a gráfot, és ellentmondásra jutottunk. Tehát az 5 csúcsú teljes gráf nem síkgráf, és így megfelelő térkép sem rajzolható.

Módszertani megjegyzés: Ha a csoport korábban még nem találkozott indirekt érveléssel, akkor érdemes lehet picit részletesebben beszélgetni róla, akár további példákat is hozni. (Például: Lehetséges-e, hogy a testvérem itthon van? Ha elment volna otthonról, akkor magával vitte volna a kulcsát. De itt a kulcsa. Tehát nem ment el otthonról.)

2. Húzzunk bele! (10 perc)

Tanár: Láttuk, hogy a 4 csúcsú teljes gráf síkbarajzolható, az 5 csúcsú teljes gráf viszont nem. De akkor értelmes kérdés, hogy legfeljebb hány élt lehet behúzni egy 5 csúcsú egyszerű gráfba úgy, hogy még síkgráf maradjon? Kísérletezzetek párban! Keressetek minél több élt tartalmazó megoldást! Aki kész van, folytathatja 6, majd 7 csúccsal! Kíváncsi vagyok kinek sikerül a legtöbb élt berajzolni, kik lesznek a rekorderek.

Módszertani megjegyzés:
Sétáljunk körbe, jelezzünk vissza a diákoknak, ha kell. Akik készen vannak a 6 csúcsú gráffal is, mehetnek tovább...

3. A teljes gráf élszáma (15 perc)

Tanár: Foglaltuk táblázatba az eredményeinket. Egészítsük ki egy harmadik oszloppal, ami talán hasznos lehetett a gondolkodás során, mégpedig azzal, hogy hány élt húzhatnánk be legfeljebb, azaz mennyi a teljes gráf élszáma.

Gráf csúcsainak száma	Élszámrekord	Teljes gráf éleinek száma
5	9	10
6	12	15
7	15	21

Módszertani megjegyzés: A táblázatba a középső oszlopba a diákok legjobb eredményét írjuk. Annyi sort töltünk ki, amennyivel foglalkoztak a diákok.

Érdeklődőbb csoportban szóba kerülhet, hogy a maximális egyszerű síkgráfokban minden éllel által közrezárt tartomány „háromszög”. (Ezt valószínűleg meg is sejtik a játék során.) Bizonyítható, hogy egy n csúcsú ($n \geq 3$) egyszerű síkgráfban maximum $3n - 6$ él van.

Tanár: Gratulálok a rekordereknek! Most egy picit vissza szeretnék térni a teljes gráf éleinek a számára. Honnan tudjuk, hogy a táblázat számai helyesek?

Diák: Megszámoltuk a teljes gráf éleit.

Tanár: Ez persze jó, de jó lenne ügyesebb módszert találni, mert nagyobb gráfok esetén a leszámlálás már időigényes lehet. Próbáljátok meg kitalálni leszámlálás nélkül, hogy hány éle van egy 8 csúcsú teljes gráfnak?

Ki az, aki tudna szöveget gyártani ehhez a feladathoz?

Példák: Egy 8 fős szilveszteri bulin mindenki koccint mindenkiel. Hány koccintás ez összesen. / 8 sakkozó között körmérkőzést rendezünk, azaz mindenki játszik mindenkiel egy partit. Hány mérkőzés ez összesen?

Tanár: Ezek jó megfogalmazások. Az is jó, ha gráfok helyett inkább ezekre gondoltok.

Módszertani megjegyzések: Ha a táblázat tovább elkészült, most foglalkozhatunk a 9 vagy 10 csúcsú teljes gráffal is. Jobb képességű csoportban vagy a gyorsabban haladóknak akár általánosan is feltehetjük a kérdést.

Hagyjunk egy kis időt gondolkodásra. Sétáljunk körbe, hallgassunk meg többféle érvelést. Így tudni fogjuk, hogy a közös megbeszélés során kiket érdemes mindenképpen felszólítani.

Az alábbiakban többféle gondolatmenetet is bemutatunk, célszerű ezek közül a csoport szintjének megfelelően válogatni. Fontosnak tartjuk, hogy kiderüljön: egy problémát többféleképpen is meg lehet jól válaszolni, ráadásul a gyerekek sokat tanulhatnak egymás megoldásaiból.

A diákok számára legemészthetőbb gondolatmenetet érdemes általánosítani, és a tételt általánosan is kimondani: n csúcsú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Tanár: Ki az, aki szívesen megosztja a gondolatmenetét?

Diák 1: Vegyünk egy csúcsot, ebből a csúcsból 7 él indul. A következőből 6 még nem számolt él indul stb. Így az élek száma $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

Diák 2: Tudjuk, hogy a 7 csúcsú teljes gráfban 21 él van. A 8 csúcsú teljes gráfban még egy csúcs van, ebből összesen 7 él indul ki, így az élek száma $21 + 7 = 28$.

Diák 3: Egy nyolcszögnek 8 oldala és $\frac{8 \cdot 5}{2}$ átlója van. Ez összesen $8 + 20 = 28$ él.

Diák 4: Egy csúcsból 7 él indul ki. 8 csúcs van összesen, ez $8 \cdot 7 = 56$ él. De ekkor minden élt kétszer (mindkét végpontjánál) megszámoltunk, tehát még osztani kell 2-vel. 28 él van.

Diák 5*: Bármely két csúcs meghatároz egy élt, tehát annyi él van, ahányféleképpen 8 különböző dolog közül ki tudok választani kettőt: $\binom{8}{2} = 28$.

Tanár: Nagyon jó, mindegyik megoldás szép! Tehát a 8 csúcsú teljes gráf élszáma 28.

4. Feladatmegoldás (8 perc)

Tanár: Gyakoroljuk egy kicsit az eddigieket! Kiosztok egy feladatlapot. A feladatlapon a feladatok nagyjából nehezedő sorrendben követik egymást. Próbáljatok meg sorban haladni. Dolgozhattok egyénileg vagy párban!

Módszertani megjegyzés: Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán a teljes gráf élszámával foglalkoztunk. Fejezzétek be otthon a feladatokat, az első hat feladattal mindenképpen foglalkozzatok!

Mellékletek

Teljes gráf feladatlap

Fájlnév: [gráfelmélet_03_melléklet_teljes_gráf_feladatok](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.