

II. óra: Gráfok gumiból

Az óra célja: Annak megértése, hogy mikor tekintünk két gráfot azonosnak.

Előzetes tudás: gráf, egyszerű gráf

Központi fogalmak: izolált csúcs, üres gráf, teljes gráf, gráf csúcsának fokszáma, gráf komplementere

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	4 csúcsú egyszerű gráfok	frontális megbeszélés	tábla, kréta	15 perc
2.	Térképek színezése	egyéni munka	színezők	10 perc
3.	A négyszíntétel	frontális megbeszélés		8 perc
4.	Sprouts játék	frontális megbeszélés, páros munka	prezentáció	10 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán összegyűjtjük az összes négycsúcsú egyszerű gráfot, ennek kapcsán tisztázunk néhány új fogalmat. Utána foglalkozunk színezéssel, síkgráfokkal. Az óra végén ismét játszunk Sprouts játékot

1. Az óra első részében **leszámoljuk az összes 4 csúcsú, egyszerű gráfot**. Ennek során megismerkedünk az izolált csúcs, az üres gráf, a teljes gráf, a gráf csúcsának fokszáma és a komplementer gráf fogalmával. (15 perc)
2. Ezután a diákok **térképeket színeznek**. (10 perc)
3. Megsejtjük a **négyszíntételt**. Átfogalmazzuk gráfelméleti problémára. Megbeszéljük a síkgráf fogalmát. Mesélünk a négyszíntétel bizonyításáról. (8 perc)
4. Végül az órán tanult fogalmak segítségével megfogalmazzuk a **Sprouts játék** szabályait a gráfelmélet nyelvén, és megbeszéljük a nyerő stratégiát abban az esetben, ha két ponttal kezdünk. (10 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Térképszínezős feladatok** nyomtatása úgy, hogy minden diáknak jusson 2-3 színező.
Fájlnév: [gráfelmélet 02 színezők](#)

Opcionális:

2. **Színes ceruzák és/vagy filctollak** a színezéshez
3. **Üres lapok** a stratégias játékhöz

Az óra felépítése

1. 4 csúcsú egyszerű gráfok (15 perc)

A következő párbeszédetek fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmaznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallni abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot.

A megbeszélés során a tanár készítsen ábrákat a táblára. (A végén bemutatunk egy lehetséges táblaképet.)

Tanár: Tekintsük a következő feladatot: Egy konferencián 4 fős csoportokra osztották a résztvevőket. A csoportokon belül néhányan (az is lehet, hogy mindannyian, és az is lehet, hogy senki sem) kezét fogtak egymással. Az egyik szervező ábrákkal szemléltette a csoportokon belüli kézfogásokat. Hányféle ilyen szemléltető ábrát készíthetett?

Mi köze a feladatnak az előző óra anyagához?

Diák: A múlt órán gráfokkal foglalkoztunk. Ebben a feladatban gráfokat rajzol a szervező.

Tanár: És milyen részei vannak a gráfoknak?

Diák: Csúcsai és élei.

Tanár: A szervező ábráin mik lesznek a csúcsok és mik az élek?

Diák: A csúcsok a 4 fős csoport tagjai, az élek a kézfogások.

Tanár: Nagyon jó. Vállalkozik rá valaki, hogy átfogalmazza a gráfelmélet nyelvére a feladatot?

Diák: Hány 4 csúcsú gráf létezik?

Tanár: Mit gondoltok? Ez mindenkinek tetszik?

Diák: A feladat szövege miatt ki kellene zárni a hurokért (nincs értelme annak, hogy valaki önmagával fog kezét) és talán a párhuzamos éleket (több kézfogásról nem volt szó).

Tanár: Hogy nevezzük azokat a gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokért, illetve párhuzamos éleket?

Diák: Egyszerű gráfoknak.

Tanár: Számoljuk meg a 4 csúcsú egyszerű gráfokat!

Módszertani megjegyzés: Ha nem adtuk fel házi feladatnak ezt a feladatot, akkor érdemes néhány percet hagyni arra, hogy a diákok lerajzoljanak néhány megfelelő gráfot.

Tanár: Ki hányat talált? Ki az, aki szerint több van, mint 20?

Diák: Szerintem több van, mint 20.

Tanár: Hogyan gondolkodtál?

Diák: Felvettem 4 pontot, A-t, B-t, C-t és D-t. Köztük összesen 6 él lehet: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Mindegyik élről egymástól függetlenül eldönthetem, hogy berajzolom-e vagy sem, azaz összesen $2^6 = 64$ db négycsúcsú egyszerű gráf van.

Tanár: Mit gondoltok erről a gondolatmenetről?

Diák: Szerintem nincs igaza, mert mindegy, hogy úgy van a gráfban 1 él, hogy AB-t rajzolom be, vagy úgy, hogy CD-t. Attól még az ugyanaz a gráf.

Tanár: Miért?

Diák: Mert ugyanazt a kapcsolatrendszert modellezzük: négy dolog közül pontosan kettő között van kapcsolat.

Módszertani megjegyzés: A csoport felkészültségétől, illetve kombinatorikai előismereteitől függően akkor is érdemes lehet bedobni a fenti beszélgetésben szereplő gondolatmenetet, ha nincs olyan diák, akinek eszébe jut. Hagyhatjuk, hogy a diákok egy kicsit vitatkozzanak arról, hogy helyes-e vagy nem.

Tanár: Igazából mindenkinek igaza van. Ha a gráf csúcsai jelöltek, például konkrét személyeket jelölnek, akkor valóban 64-féle kapcsolatrendszer lehet köztük. Jelölt csúcsok esetén nem mindegy például, hogy A és B ismerik egymást, vagy C és D. Ha viszont jelöletlenek, és csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy milyen kapcsolatrendszer lehet általában négy dolog között, akkor kevesebb. A gráfok csúcsait a középiskolában gyakran jelöletlennek tekintjük. Ha így szeretnénk megtalálni az összes 4 csúcsú egyszerű gráfot, akkor egy kicsit nehezebb dolgunk van. Hogy lehetne nekikezdeni?

Diák: Lerajzolhatnánk az összeset, majd megszámlolhatnánk őket.

Tanár: Igen, ezt leszámlálásnak nevezzük. Jó módszernek tűnik ez?

Diák: Igen, mert nincs olyan sok – biztosan kevesebb van, mint 64.

Tanár: Mire kell figyelni a leszámláláskor?

Diák: Hogy semmit ne hagyjunk ki.

Tanár: És még?

Diák: Hogy semmit ne számoljunk kétszer.

Tanár: És ezt hogy lehetne biztosítani?

Diák: Hogy valamilyen logikus rendben rajzoljuk le a gráfokat.

Tanár: Például?

Diák: A berajzolt élek száma szerint.

Tanár: Jó ötlet! Hány él lehet a 4 csúcsú egyszerű gráfban?

Diák: Korábban láttuk, hogy legfeljebb 6.

Tanár: Rendben, akkor haladjunk a kevesebb élt tartalmazó gráfoktól a több élt tartalmazók felé. Mivel kezdjük?

Diák: Hát egy olyannal, amiben egyáltalán nincs él.

Tanár: Az gráf?

Diák: Szerintem igen. Előfordulhat, hogy például 4 személy közül senki sem fogott kezét senkivel.

Tanár: Bizony. Az ilyen gráfot **üres gráfnak** nevezzük. Az üres gráf úgynevezett **izolált csúcsokból** áll. Az izolált csúcsokból nem indul ki él. Hány 4 csúcsú üres gráf van?



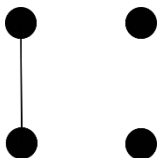
Diák: Hát egy.

Tanár: Mindenki ugyanúgy rajzolta le, mint én? Rajzoljon valaki egy másik 4 csúcsú o élű egyszerű gráfot! ... Ez most ugyanaz vagy nem ugyanaz?

Diák: Ugyanazt a kapcsolatrendszert szemlélteti, azaz, hogy a négy személy közül senki sem fogott kezét a másikkal. Szóval szerintem ugyanaz.

Tanár: Rendben, igazad van. Mindegy hogyan rajzoljuk le a gráfot, a lényeg, hogy ugyanazt a kapcsolatrendszert fejezze ki, ebben az értelemben a gráfok gumiból vannak. Tényleg egy 4 csúcsú üres gráf van. Mi a következő?

Diák: Az, amelyikben 1 él van. Ilyenből is egy van. Ketten kezét fogtak egymással a többiek „nem csináltak semmit”.

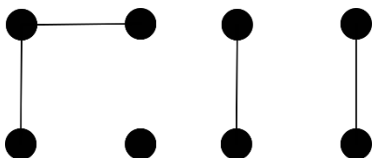


Tanár: Mindenki egyetért? És utána?

Diák: Az, amelyikben 2 él van.

Tanár: Ilyenből is egy van?

Diák: Nem. Lehet, hogy a két él az egyik csúcsban találkozik, és az is, hogy a két él két-két „különálló” csúcsot köt össze.



Tanár: És ezek különböző gráfok?

Diák: Igen, mert az egyik esetben van olyan csúcs, ami két másik csúccsal is kapcsolatban van, a másikonál meg nincsen. / Az egyik esetben egy személy fogott kezét két másikkal, a másikban két-két személy fogott kezét egymással.

Tanár: Van más különbség is?

Diák: Az egyikben van izolált csúcs, a másikban nincsen. / Az egyik esetben van olyan személy, aki senkivel sem fogott kezét, a másikban nincs.

Tanár: Nagyon jó. Mi a következő?

Diák: A 3 élt tartalmazó gráfok.

Tanár: Ezeket hogy vegyük sorra?

Diák: Lehetne aszerint, hogy egy csúcsból hány él indul ki.

Tanár: Bevezetek egy új fogalmat, hogy könnyebb legyen beszélgetnünk:

Egy **gráf csúcsának a fokszáma** a belőle kiinduló élek száma.

Hagyjatok még helyet az ábráknak, kicsit lejjebb írtátok le ezt a definíciót. Meg tudja valaki fogalmazni foksámokkal, hogy miben különbözik a két 2 élt tartalmazó gráf?

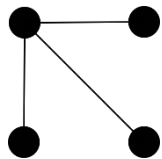
Diák: Az egyikben van olyan csúcs, aminek a fokszáma 2, a másikban nincs.

Tanár: Mennyi az izolált csúcs fokszáma?

Diák: 0.

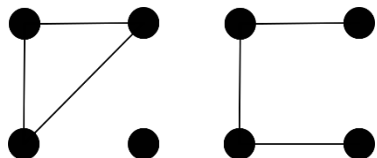
Tanár: Térjünk vissza a 3 élű gráfokra!

Diák: Lehet, hogy mindhárom él egy csúcsból indul, azaz a csúcs fokszáma 3.



Tanár: Rajzoljuk le! Mi a következő lehetőség?

Diák: Hogy vannak 2-fokszámú csúcsok. Ezekből lehet 3, ha van egy izolált csúcs, illetve 2.

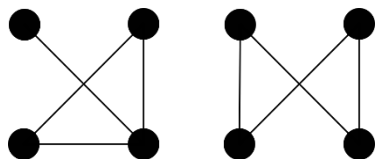


Tanár: Van még más lehetőség is?

Diák: Nincsen. Tehát 3 van összesen.

Tanár: Nagyon jó. Akkor a 4 élű gráfok jönnek. Hány ilyen van?

Diák: Szerintem 2.



Tanár: Lerajzolnád őket? ... Talált valaki mást?

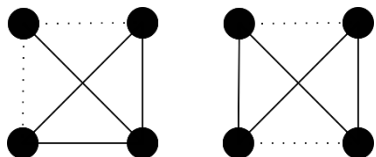
Módszertani megjegyzés: Ha itt vagy a korábbi lépéseknél felvetődik a diákokban, hogy ők találtak további eseteket, akkor kérjük meg, hogy rajzolják meg őket, és beszélgessünk közösen arról, hogy ezek miért ugyanazt a kapcsolatrendszert szemléltetik, mint valamelyik már megtalált eset (miért izomorfak a gráfok). Segíthet, ha elképzeljük, hogy a gráfok gumiból vannak és elmozgathatjuk a csúcsokat/az éleket.

Tanár: Van közöttetek olyan, aki rajzolás nélkül is meg tudta volna mondani, hány van?

Diák: Ugyanannyi van, mint 2 élű gráf.

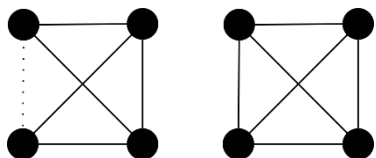
Tanár: Miért?

Diák: Mert a 4 élűekben 2 él nincs berajzolva az összes közül.



Tanár: Ez nagyon szép gondolat. Azt az egyszerű gráfot, amelyben pontosan azok a csúcsok vannak összekötve éllel, amelyek az eredeti egyszerű gráfban nincsenek, **a gráf komplementerének** nevezzük. Van tehát egy olyan, amelyikben egy csúcsból kiinduló két él nincs berajzolva, és egy olyan, amelyikben két-két csúcs között nem megy él. Ezek a két élt tartalmazó gráfok komplementerei.

Diák: És akkor 1 olyan van, amiben 5 él van. És 1 olyan, amiben 6 él.

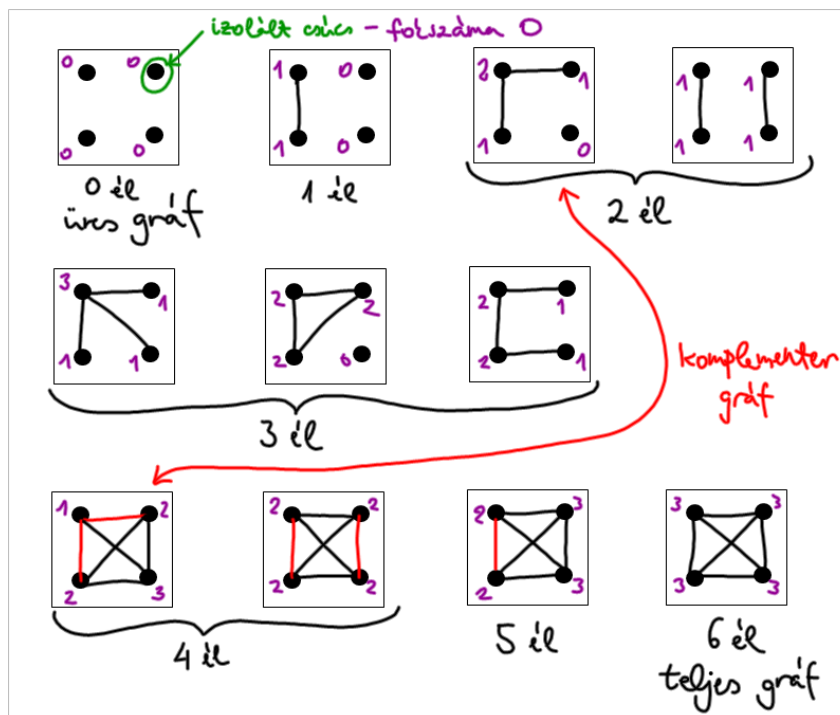


Tanár: Az utolsót **teljes gráfnak** nevezzük. Mi a teljes gráf komplementere?

Diák: Az üres gráf.

Tanár: Sikerült mindet összeszednünk. Hány van összesen?

Diák: $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$.



Tanár: A feladat megbeszélése során sok új fogalom, elnevezés került elő. Szedjük össze ezeket közösen!

- **üres gráf:** nem tartalmaz éleket
- **teljes gráf:** egyszerű gráf, amelyben bármely két csúcs között van él
- **komplementer gráf:** egyszerű gráf komplementere az a gráf, amelynek csúcsai megegyeznek az eredeti gráf csúcsaival, és csúcsai közül pontosan azok vannak éllel összekötve, amelyek az eredeti gráfban nincsenek
- **izolált pont:** olyan csúcs, amelyből nem indul ki él
- **gráf csúcsának fokszáma (foka):** a csúcsból kiinduló élek száma, a hurokél 2-vel növeli a csúcs fokszámát

Módszertani megjegyzés: Ha van rá idő, akkor a diákok fogalmazzák meg a definíciókat!

2. Térképek színezése (10 perc)

Tanár: Van közöttetek olyan, aki szokott a szabadidejében színezni? Pihenésképpen hoztam nektek színezőket. Színezhettek akármilyen színekkel, de vannak megkötéseim:

- szomszédos (közös határvonallal rendelkező) mezőket nem színezhettek azonos színnel;
- törekedjetek rá, hogy minél kevesebb színt használjatok!

Módszertani megjegyzés: Engedjük, hogy a diákok választhassanak a különböző térképek/színezők közül.

3. A négyszíntétel (8 perc)

Tanár: Folytathatjátok a színezést, de közben figyeljetek rám is! Hány szín kellett a színezéshez?

Diák: Négy vagy kevesebb.

Módszertani megjegyzés: Ha van olyan színező, amit a diák szerint csak 5 színnel lehet kiszínezni, akkor azt kiadhatjuk feladatnak a többieknek, hogy próbálják meg ők is a színezést.

A csoport érdeklődésétől, lelkesedésétől és a rendelkezésre álló időtől függően dönthetünk úgy, hogy nem áruljuk el a négyszíntételt (ld. alább), hanem fogadást ajánlunk a diákoknak: Pl. Év végén ötöst adunk annak a diáknak, aki tud olyan térképet alkotni, amit csak 5 színnel lehet kiszínezni. Ha így döntünk, akkor a négyszíntételről szóló matektörténeti részt érdemes inkább a következő órák valamelyikén elmondani.

Tanár: Ez egy híres tétel: A matematikában a **négyszíntétel** azt állítja, hogy egy tetszőleges régiókra osztott síkot, akár egy térképet egy ország megyéiről, ki lehet úgy színezni legfeljebb négy szín felhasználásával, hogy ne legyen két azonos színű szomszédos régió.

A tétel története elég izgalmas, ezért szeretném elmesélni.

A sejtést először 1852-ben fogalmazta meg Francis Guthrie, amikor megfigyelte, hogy Anglia megyéinek színezéséhez négy színnél nem volt többre szüksége. Tudjátok mi az a sejtés?

Diák: Egy olyan igaznak gondolt összefüggés, amit még nem bizonyítottak be?

Tanár: Igen. Hallottatok már ilyenről? Akinek van kedve utánajárthat, hogy milyen híres sejtések vannak a matematikában. De most térjünk vissza a négyszínsejtésre.

Sok híres matematikus próbálkozott a bizonyítással, de rendre kudarcot vallottak. 1890-ben Percy Heawood bebizonyította az ötszíntételt. Mi lehet az?

Diák: Hogy minden térképet ki tudunk színezni öt színnel úgy, hogy a szomszédos régiók ne legyenek azonos színűek.

Tanár: Igen. Erről szól az ötszíntétel. A bizonyítása nem olyan bonyolult, ha lenne rá néhány tanóránk, és megtanulnánk néhány további fogalmat és összefüggést, mi is be tudnánk bizonyítani.

Aztán 1960-as években kezdtek el számítógépeket is bevetni a négyszíntétel bizonyításához, végül 1976-ban Kenneth Appel és Wolfgang Haken a University of Illinois-ról gépi segítséggel bizonyította a tételt. A bizonyítás rendkívül hosszú volt, 100 oldal az összefoglalás, 100 oldal a részletezés, 700 oldalt tettek ki a segédtetelek, plusz 1200 óráig futott a számítógépes program. Egy ilyen bizonyítás mindennek nevezhető, csak elegánsnak nem. Gondoljatok csak a Pitagorasz-tétel bizonyítására, ami elfér egy fél oldalon!

Források:

<https://hu.wikipedia.org/wiki/N%C3%A9gyysz%C3%ADn-t%C3%A9tel>

<http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198022>

Tanár: De mi a köze mindennek a gráfokhoz?

Diák: Lehetnének az országok a gráf csúcsai és két csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő országok szomszédosak.

Tanár: Nagyon jó. És akkor mit színezzünk ki?

Diák: A csúcsokat.

Tanár: Akkor megfogalmazza valaki a négyszíntételt a gráfokra?

Diák: Egy gráf csúcsai mindig kiszínezhetők négy színnel úgy, hogy minden él két végpontja különböző színű legyen.

Tanár: És ez igaz?

Diák: Igen, mert a négyszíntétel igaz.

Tanár: De nem hagytunk ki egy lépést? Bármilyen gráfot kaphatok térkép alapján?

Diák: Nem, csak egyszerű gráfot. Nincs értelme a hurokélnek és a párhuzamos éleknek.

Tanár: Igen, ebben igazad van. De ennél többre van szükség. A térkép alapján rajzolt gráfok olyan speciális gráfok, amelyek élei nem metszik egymást (kizárólag a csúcsokban találkoznak), hiszen egy határvonal csak két országhoz tartozhat. Az ilyen gráfokat **síkbarajzolható gráfoknak** vagy röviden **síkgráfoknak** nevezzük.

Mit gondoltok, például a 4 csúcsú teljes gráf síkgráf?

Diák: Nem, mert a két átlósan behúzott él metszi egymást.

Tanár: Mindenki egyetért?

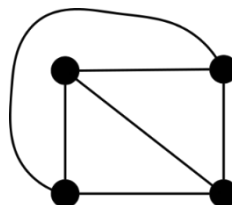
Diák: Le tudom úgy rajzolni, hogy az élek ne metsszék egymást.

Tanár: Hogyan? Mutasd meg!

Diák: Az egyik átlós élet kívül vezetem. Így:

Tanár: Akkor síkgráf vagy sem?

Diák: Ha le tudom így rajzolni, akkor síkgráf.



Tanár: Bizony, és ez a síkbarajzolt verziója, míg a korábbi nem volt az. A gráfokra úgy kell tekintenünk, mintha gumiból lennének: az éleket csúcsokat mozgathatjuk, attól még ugyanarról a gráfról van szó, ugyanazt a kapcsolatrendszert szemlélteti.

Módszertani megjegyzések: Érdeklődőbb csoportokban előkerülhet az **izomorf gráf** fogalma.

Van egy alkalmazás, ahol síkgráfokat kell kibogozni, mintha gumiból lennének. Ajánlhatjuk egy kis otthoni játékokra esős délutánokra, elég élvezetes: <https://meszter-bogozos.lovable.app/>

Egy másik játékban pedig gráfok csúcsait kell színeznünk úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek legyenek: <https://meszter-kiszinezos.lovable.app/>

4. Sprouts játék 2 kezdőponttal (10 perc)

Tanár: A múlt órán megismerkedtünk a Sprouts játékkal. Mi köze a gráfokhoz?

Diák: A játék során gráfokat rajzolunk.

Tanár: Ebben igazad van. Tudnátok pontosítani, hogy milyen gráfokat?

Diák: Síkgráfokat, mert az élek nem metszhetik egymást.

Tanár: Nagyon jó. És még milyen feltétel van?

Diák1: Egy csúcs fokszáma legfeljebb 3 lehet.

Diák2: Rajzolhatunk hurokéleket vagy párhuzamos éleket, de aztán az élre felveszünk egy pontot, így mindig egyszerű gráfot kapunk a lépés végén.

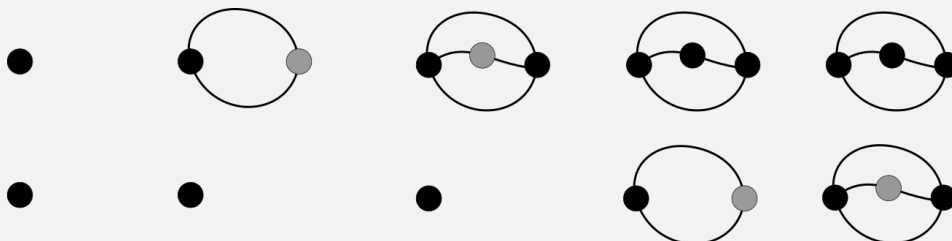
Tanár: Szuper, azt hiszem mindent összeszedtetek. Ki az, aki szívesen játszana ellenem, ha 2 ponttal kezdünk?

...

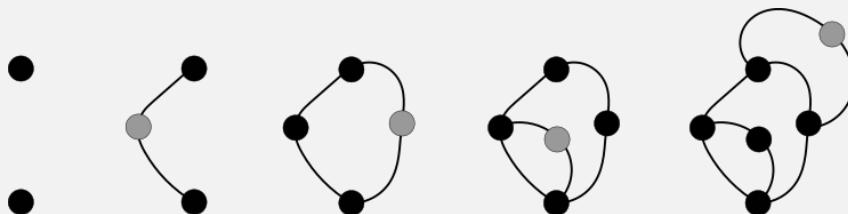
Módszertani megjegyzések: Kérdezzük meg a jelentkező diákot, hogy kezdeni szeretne vagy átadja nekünk a kezdés jogát. Akár több fordulót is játszhatunk, a diákoknak sikerélmény, ha legyőzhetnek minket, és így a többiek is könnyen megfigyelhetik a nyerő stratégiát.

Ha marad idő, megbeszélhetjük a nyerő stratégiát, ami a következő: Érdekes átadni a kezdés jogát.

Ha az ellenfelünk hurokélel kezd, akkor kössük össze a kört alkotó két pontot a körön belül. Ekkor a másik játékos nem tud mást tenni, mint hurokélt rajzolni a másik pontra. Ha most megint ugyanúgy járunk el, mint az előbb, akkor nem tud lépni.



Ha az ellenfelünk a két pont közötti éllel kezd, akkor mi is rajzoljunk a két eredeti pont közé éleket. Utána az most meglévő 4 csúcsú kör, azon két pontját kössük össze, amit az ellenfelünk nem, de a másik tartományban, mint, amit az ellenfelünk választott, azaz, ha ő a körön belül haladt, akkor, mi haladjunk kívül és megfordítva. Az ellenfelünk nem fog tudni lépni.



A megbeszélés során azt is érdemes tisztázni, hogy mi történik, ha nem ezeket lépjük.

5. Az óra lezárása (2 perc)

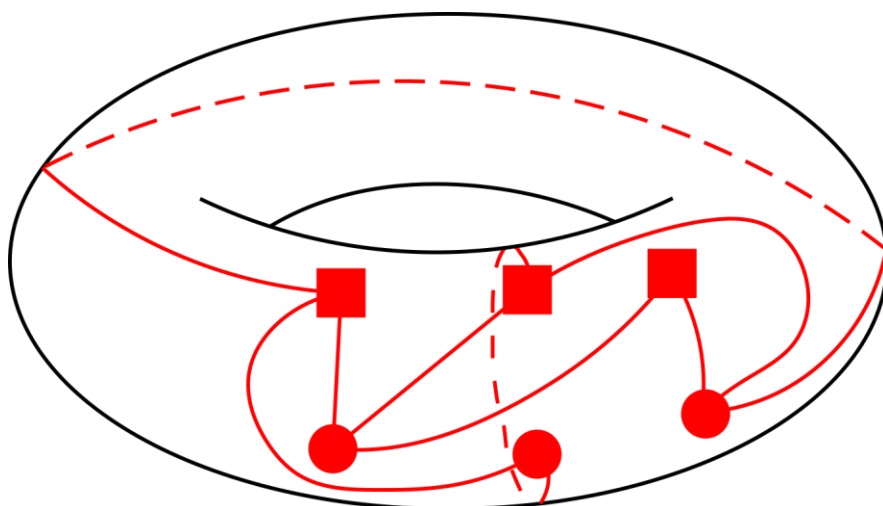
Tanár: A mai órán láttuk, hogy a gráfok gumiból vannak! És, hogy a színezéshez is van közük.

Javasolt házi feladatok:

1. Adott három ház és három kút. Úgy szeretnénk utakat kialakítani mindhárom háztól mindhárom kútig, hogy az utak ne keresszezzék egymást. Lehetséges? És ha a három ház és a három kút egy gyűrű alakú bolygón van? (Papírsíkból készíthetsz ilyen „bolygót”.)
2. Rajzolj olyan térképet, amelyen 4 ország szerepel, és mindegyik szomszédos az összes többivel! Lehet-e ugyanilyen térképet rajzolni 5 országgal?

Magyarázat: Mindkét feladat síkgráfokkal kapcsolatos, amely ugyan nem törzsanyag, de egyrészt érdekes lehet a diákok számára, másrészt erősíti azt a gondolatot, hogy egy gráfot többféleképpen is le lehet rajzolni.

Az első feladat kapcsán izgalmasnak gondoljuk a síkból való kilépést, az ilyen típusú ötletek megismerése szoktatja a diákokat arra, hogy egy-egy kérdést többféle nézőpontból is érdemes vizsgálni. Míg síkon (vagy gömbön) nem lehet lerajzolni a 3 ház – 3 kút gráfot, addig tóruszon igen.



A második feladat pedig hidat teremt jelen óra és a következő óra között, amelynek hangsúlyos eleme lesz a teljes gráf élszáma.

Mellékletek

Színező

Többféle színező, amelyek közül a diákok választhatnak, hogy melyiket szeretnék kiszínezni.

Fájlnév: [gráfelmélet 02 színezők](#)

Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.