

# I. óra: Gráfok mindenütt

**Az óra célja:** A gráf fogalmának bevezetése.

**Előzetes tudás:** Ez az óra nem igényel jelentős előzetes tudást. (Szövegértés, logikus következtetés.)

**Központi fogalmak:** gráf, csúcs, él, hurokél, párhuzamos élek, egyszerű gráf

## Az óra felépítése

|    | <i>Rövid leírás</i>    | <i>Módszer</i>          | <i>Segédeszköz</i>        | <i>Várható időtartam</i> |
|----|------------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1. | <b>Sprouts játék</b>   | tanári közlés, pármunka | prezentáció               | 15 perc                  |
| 2. | <b>Feladatmegoldás</b> | egyéni- és csoportmunka | feladatok                 | 15 perc                  |
| 3. | <b>A gráf fogalma</b>  | frontális megbeszélés   | tábla, kréta, prezentáció | 13 perc                  |
| 4. | <b>Az óra lezárása</b> | tanári közlés           |                           | 2 perc                   |

Ezen az órán a diákok felfedezik a gráf fogalmát.

1. Az óra első részében egy olyan **stratégias játékot** játszanak, amely során egyre bővülő gráfokat rajzolnak.
2. Majd megoldanak és bemutatnak egymásnak néhány **bevezető feladatot**, amely során sokan valószínűleg gráfot fognak rajzolni.
3. A korábbi tevékenységek összegzéseként **bevezetjük a gráf fogalmát**, és az ezzel kapcsolatos fontos elnevezéseket.
4. Végül összegyűjtünk néhány területet, ahol a gráfok jól alkalmazhatók.

## Az óra előkészítése

**Szükséges:**

1. **Bevezető feladatok** nyomtatása 4 fős csoportonként 1 példányban  
Fájlnév: [gráfelmélet 01 melléklet feladatok](#)
2. **Prezentáció** előkészítése  
Fájlnév: [gráfelmélet 01 prezi](#)

**Opcionális:**

3. **Sprouts játékleírás**  
Fájlnév: [gráfelmélet 01 sprouts játék](#)
4. **Üres lapok** a stratégias játékhoz

## Az óra felépítése

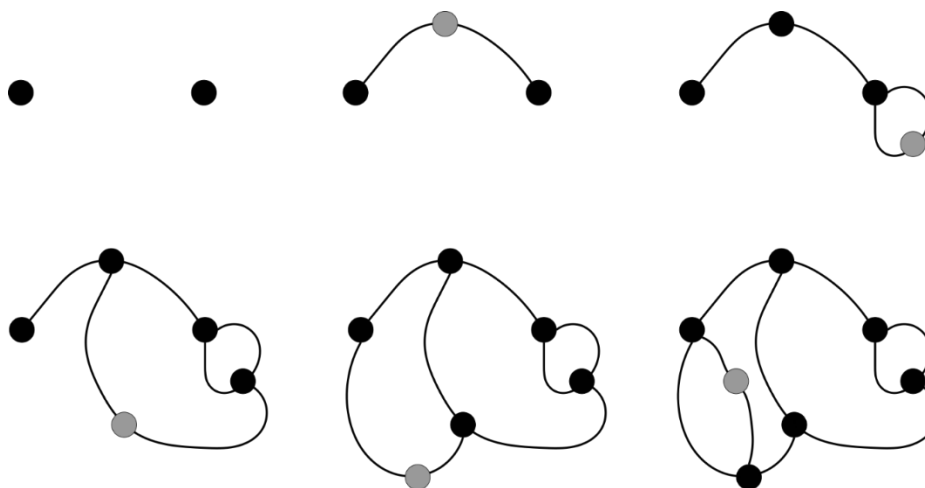
### 1. Sprouts (15 perc)

**Tanár:** Az óra elején játszani fogunk. Alkossatok párokat! A játék neve: Sprouts, ez az angol szó rügyet, hajtást jelent. Az 1960-as években találta ki két cambridge-i matematikus (John Horton Conway and Michael S. Paterson), de ne ijedjete meg, nem kell hozzá semmilyen előzetes képzettség. A játékot papíron játsszuk. A játékosok felvesznek néhány pontot (a kivetített példában kettőt). Aki jön, az összeköt 2 nem feltétlenül különböző pontot egy nem feltétlenül egyenes vonallal. Ezután rárajzol a vonalra egy új pontot. Ezt folytatják a játékosok felváltva betartva a következő szabályokat:

- egy pontból legfeljebb 3 „vonalgég” indulhat ki,
- a vonalak nem metszhetik önmagukat és egymást, csak pontokban találkozhatnak.

Az veszít, aki nem tud lépni.

A kivetített ábrán láthatjátok egy olyan játék menetét, amely két ponttal indult. (2. dia)



Minden érthető? Ha igen, akkor vegyetek fel 3 pontot, utána a megbeszélte szabályok szerint mehet a játék. Nagyjából 10 perccel van a játékokra.

**Módszertani megjegyzések:** A párok lehetnek az egymás mellett ülő tanulók, de dolgozhatnak véletlenszerű párokkal is, ehhez használhatjuk például a <https://flippity.net/> „Random name picker” alkalmazását. Ha páratlan számú diák van a csoportban, akkor alakíthatunk egy 3 fős csoportot, a játék hárman is érdekes.

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a [www.virtualisora.hu/idozito/](http://www.virtualisora.hu/idozito/) oldal segítségével!

Sétáljunk körbe, figyeljük a párok játékát. Emlékeztessük őket a szabályokra, hogyha szükséges. Később még visszatérünk erre a játékokra, egyelőre nem elvárás, hogy felfedezzenek valamilyen nyerő stratégiát, inkább az a cél, hogy ismerkedjenek a játékkal, gráfokat rajzoljanak.

## 2. Bevezető feladatok (15 perc)

**Tanár:** Remélem, tetszett a játék! Most álljátok párba egy másik párral, így alkossatok 4 fős csoportokat. A csoport minden tagja kap egy feladatot. 5 perctek van arra, hogy megoldjátok. Utána mutassátok be a feladatot és a megoldásotokat a csoporttársaitoknak. Próbáljátok meg megfogalmazni, hogy mi a közös a feladatokban!

**Módszertani megjegyzések:** Érdeemes a lépéseket a táblán rögzíteni:

1. egyéni feladatmegoldás
2. feladatok bemutatása egymásnak
3. mi a közös?

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a [www.virtualisora.hu/idozito/](http://www.virtualisora.hu/idozito/) oldal segítségével!

Sétáljunk körbe, segítsük az esetleges elakadókat. A nagyon gyorsan haladók megkaphatják a feladatukhoz tartozó nehezített verziót (ld. feladatlap) vagy besegíthetnek a társaiknak.

## 3. A gráf fogalma (13 perc)

A következő párbeszédek fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmazznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallni abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot.

**Tanár:** Mit találtatok, mi volt közös a feladatokban?

**Diák:** Minden feladatban kapcsolatokról volt szó.

**Tanár:** Milyen kapcsolatokról?

**Diák:** Hát például utakról, ismeretségekről, rokoni kapcsolatokról.

**Tanár:** Volt-e valami közös abban, ahogyan megoldottátok a feladatokat?

**Diák:** A csoportból többen rajzoltunk ábrát.

**Tanár:** Milyen ábrát?

**Diák:** Olyat, ami pontokból és őket összekötő vonalakból áll. Mint a Sprouts játékban is.

**Tanár:** Ilyeneket, amiket kivetítettem, ugye? (3. dia) Ezeket **gráfnak** nevezzük. Próbáljuk meg összerakni, hogy milyen fontos jellemzőik vannak.

**Diák:** Vannak pontok és vonalak.

**Tanár:** Igen. A pontokat szoktuk **csúcsnak** is nevezni, a vonalakat **élnak** hívjuk. Mi jellemző az élekre?

**Diák:** Két pontot kötnek össze.

**Tanár:** Két feltétlenül különböző pontot? Mit gondoltok? Megengedjük, hogy egy élnek ugyanaz legyen a két végpontja?

**Diák:** A Spouts játékban megengedett volt ilyen lépés.

**Tanár:** És lehet olyan gyakorlati probléma, ahol van ennek értelme?

**Diák:** Hát egy körút, ami visszatér a kiindulási településhez.

**Tanár:** Nagyon jó. Igen, mivel gyakran van értelme ennek, ezért megengedjük, hogy egy élnek ugyanaz a csúcs legyen mindkét végpontja. Az ilyen élet **hurokélnak** nevezzük. (4. dia) És mit gondoltok arról, hogy lehet-e két különböző élnek ugyanaz mindkét végpontja?

**Diák:** Hát erre is tudunk mondani gyakorlati problémát: például két település között két út is vezet.

**Tanár:** Nagyon jó. Ezek a **párhuzamos élek**. (5. dia)

Készen állunk megalkotni a gráf definícióját: A **gráf** csúcsokból (legalább 1-ből), és élekből áll, minden él két – nem feltétlenül különböző – csúcsot köt össze. (6. dia) Írjátok fel ezt a definíciót!

Láttuk, hogy vannak olyan problémák, amikor érdemes megengedni a hurokélt és párhuzamos élek létezését. De olyan probléma is, amikor nem. Tudtok ilyet mondani?

**Diák:** Például az ismeretségeknél nem igazán van értelmük.

**Tanár:** Nagyon jó. Azokat a gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt, illetve párhuzamos éleket, **egyszerű gráfoknak** nevezzük. (7. dia)

Van-e ötletek, hogy az eddig megbeszélteken kívül, hol jelennek meg még gráfok?

**Diák:** Például egy útvonal tervezésekor. A gráf csúcsai a városok, az élek pedig a köztük menő utak.

**Tanár:** Így van! Az éleket esetleg irányíthatjuk, azaz jelölhetjük, hogy azon az útszakaszon csak az egyik irányban lehet közlekedni. De súlyokkal is elláthatjuk őket: ezzel kifejezhetjük két pont távolságát, vagy például az útszakasz megtételéhez szükséges átlagos időt. Egy ilyen – úthálózatot reprezentáló – gráfban gyorsan tudunk legrövidebb utat keresni. A legrövidebb utat kereső eljárások, algoritmusok igazából számos egyéb gyorsító ötletet is használnak: nem csak a kiinduló csúcsból keresnek rövid utat a célállomás felé, hanem párhuzamosan a célponttól visszafelé is a kezdőpont felé. Továbbá valamilyen előzetes feltételezést, heurisztikát is használhatnak, például a légvonal által meghatározott távolságot, hogy ezzel hamarabb kiválasszák az optimális útvonalat a számunkra. (8. dia)

**Diák:** Én úgy hallottam, hogy a felvételinél a jelentkezők és az intézmények (egyetemek) összepárosításánál is használnak gráfokat.

**Tanár:** Bizony. Például az egyetemi felvételi esetén a diákok megjelölnék egyetemeket, amelyet két csúcshalmazzal, illetve a diákot és az egyetemet reprezentáló csúcsok közé behúzott élekkel modellezhetünk. Az lesz a feladat, hogy ezen élek közül válasszon ki néhányat a központi algoritmus úgy, hogy minden diák legfeljebb egy egyetemre kerüljön be, és a szakok létszámlimitjét ne lépje túl a felvettek száma. Ráadásul a diákok preferencialistával érkeznek, azaz nem ugyanannyira szeretnének minden szakra bekerülni. Szerencsére erre is vannak hatékony algoritmusok. (9. dia)

**Tanár:** Az elkövetkezendő néhány órán megismerkedünk a gráfelmélet alapfogalmaival. Fogunk sétálni, utakon haladni, de fák leveleit is számolgatjuk majd. Megpróbálunk minél kevesebb színnel kiszínezni egy térképet. Visszarepülünk majd 1736-ba, hogy Eulerrel közösen tegyük meg a gráfelmélet történetének legelső lépéseit, szó szerint: ugyanis egy délutáni sétálgatásból indult ki az a tudományterület, amely az informatika, az algoritmuselmélet egyik meghatározó pillére. Szó lesz majd Erdős Pálról, aki a 20. század egyik kiemelkedő matematikusa, de nem lehet úgy gráfelmületről beszélni, hogy ne említsük meg az egyik legnagyobb kortárs matematikust, akinek vitathatatlan érdemei vannak ezen a területen., Lovász Lászlót. Ha a körbejárás, a ló és Sir Hamilton név egy mondaton belül hangzik el, akkor most a legtöbben a Formula-1-re gondoltok, de pár óra múlva talán a gráfok különböző bejárásai jutnak majd az eszetekbe. A tananyag végén megtanuljuk mi a különbség a fa és az erdő között, illetve hogyan kell kijutni egy labirintusból. (10. dia)

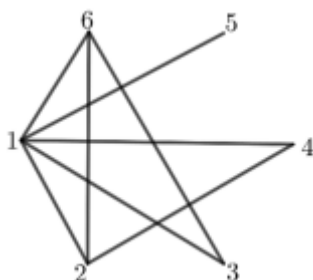
## 4. Az óra lezárása (2 perc)

**Tanár:** A mai órán megismerkedtünk a gráf fogalmával! Házi feladatként oldjátok meg a kivetített feladatokat! (12. dia)

### Javasolt házi feladatok:

**1.** Az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számokat leírtuk egy lapra. Két különböző számot pontosan akkor kötünk össze egy vonallal (éllel), ha az egyik szám osztója a másiknak (de egyik számot sem kötjük össze önmagával). Így egy hatpontú gráfot kapunk. Rajzolja fel a kapott gráfot! (Középszintű érettségi, 2023. május)

**Magyarázat:** Jó gyakorlófeladat. A diákok számára motiváló lehet, hogy érettségi feladat.



**2.** Egy konferencián 4 fős csoportokra osztották a résztvevőket. A csoportokon belül néhányan (az is lehet, hogy mindannyian, és az is lehet, hogy senki sem) kezet fogtak egymással. Az egyik szervező ábrákkal szemléltette a csoportokon belüli kézfogásokat. Hányféle ilyen szemléltető ábrát készíthetett?

**Magyarázat:** A következő órán részletesen foglalkozunk majd ezzel a feladattal, ezért jó lenne, ha a diákok gondolkodnának rajta. A feladat kiválóan alkalmas egy sor új fogalom bevezetésére: izolált csúcs, üres gráf, teljes gráf, komplementer gráf, gráf csúcsának a fokszáma.

**3.** Találjuk ki, hogyan érdemes a Sprouts-ot 2 kezdőcsúcs esetén játszani, hogy mi nyerjünk, azaz keressünk nyerő stratégiát!

**Magyarázat:** A stratégias játékokon való gondolkodás kifejezetten fejleszti a logikus gondolkodást, az algoritmikus gondolkodást. A következő óra végén sor kerülhet a stratégiák kipróbálására. (A nyerő stratégiát a játék leírásában leírtuk.)

## Mellékletek

### Bevezető feladatok

A gráf fogalmát bevezető feladatok. Négy fős csoportokban mindenki egy-egy feladatot old meg, majd a feladatot és a megoldását bemutatja a többieknek.

Fájlnév: [gráfelmélet\\_01\\_melléklet\\_feladatok](#)

### Prezentáció

Az óra során kivetített prezentáció. Tartalmazza a Sprouts játék leírását, a gráf definícióját és a lehetséges házi feladatot.

Fájlnév: [gráfelmélet\\_01\\_prezi](#)

Fájlnév: [gráfelmélet\\_01\\_sprouts\\_játék](#)

### Táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.