

VIII. óra: Szép hibák

Az óra célja: Eddig tanultak áttekintése, hibás megoldások javítása.

Előzetes tudás: egyszerű kombinatorika feladatok megoldása, alpműveletek, szövegértés

Központi fogalmak: kombinatorika, faktoriális

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Osztály köszöntése, adminisztráció Kérdések megbeszélése	frontális megbeszélés		5 perc
2.	Múlt órán írt feladatok megoldása	egyéni munka	Múlt órán készített feladatkártyák, mágnes/gyurma-ragasztó	5 perc
3.	Egy hibás megoldás közös javítása	frontális megbeszélés		10 perc
4.	Szép hibák Hibakeresős feladatsor megoldása	egyéni vagy páros munka	Hibakeresős feladatsor	10 perc
5.	Összefoglalás	frontális megbeszélés	Totó az első óráról	10 perc
	Az óra lezárása	tanári közlés		5 perc

Az óra előkészítése

1. Megoldások felírása a táblára:

$$6!, 6 \cdot 5, 6 \cdot 5 \cdot 4, 6^2, 2^6, \frac{6!}{6}, \frac{6 \cdot 5}{2!}, \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}, 6! - 2 \cdot 5!$$

A diákoknak az előző órán elkészített feladatkártyákat a hozzájuk tartozó megoldások (végeredmények) alá kell csoportosítani.

Eszközök előkészítése: gyurmaragasztó/mágnes, feladatkártyák (diákok által megírtak + opcionálisan az előre kinyomtatottak).

Szükség szerint feladatkártyák nyomtatása (ha fel akarjuk használni, de az előző órára nem nyomtattuk ki őket).

2. Hibakeresős feladatsor nyomtatása (fejenként egy példány)

Fájlnév: [kombinatorika9_o8_melléklet_hibakeresős_feladatsor_51-53](#)

3. Az első órán kitöltött totó: a legjobb, ha a diákok elő tudják venni a saját példányukat (legalább padonként egyet). Ha ez várhatóan nem működik, akkor nyomtassunk újat, vagy készítsük elő a kivetítést.

Fájlnév: [kombinatorika9_o1_melléklet_órai_totó](#)

Az óra tartalma

1. Órakezdés, adminisztráció, kérdések (5 perc)

Tanár: Az előző órán kértem, hogy a téma lezárásához közeledve nézzétek át az eddig megoldott feladatokat. Volt közte olyan, amivel kapcsolatban valamilyen kérdésetek van?

2. Múlt órán írt feladatok megoldása (5 perc)

Tanár: A múlt órán kombinatorika feladatokat írtatok a táblán látható műveletsorokhoz.

$$\begin{array}{ccccccc} 6! & 6 \cdot 5 & 6 \cdot 5 \cdot 4 & 6^2 & 2^6 & \frac{6!}{6} \\ & \frac{6 \cdot 5}{2} & \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} & 6! - 2 \cdot 5! & & \end{array}$$

Most mindenki kap egy feladatot. Oldjátok meg fejben, majd tegyétek a megfelelő műveletsor alá! Figyeljétek, hogy a többiek hová teszik a feladatokat, olvassátok el őket, ellenőrizzétek egymás munkáját. Figyeljétek meg, hogy mennyire különböző szövegű feladatok készültek egy-egy műveletsorhoz!

Módszertani megjegyzések

Osszuk ki a feladatkártyákat, minden diáknak jusson egy saját példány. A diákok önállóan kíséthalnak a táblához, és elhelyezik a kártyájukat a megfelelő helyre.

készültek elég jó (vagy elég sokféle) feladatok, akkor kiegészíthetjük őket az előre megadott feladatkártyákkal (#k7_melléklet_feladatírás).

Ha valamilyen vitás kérdés vetődik fel, akkor álljunk meg, és beszéljük át közösen. Ha volt a múlt órán vagy valamelyik korábbi órán tanulságos hibás megoldás, akkor a fenti helyett vagy mellett azt is átbeszélhetjük.

3. Egy hibás megoldás közös javítása (10 perc)

Tanár: Menjetek vissza a helyetekre! Beszéljünk meg közösen még egy feladatot: „Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben szerepel 0 számjegy?”

Nézzünk rá egy megoldást! Az első helyen nem szerepelhet 0, ezért az első helyre 9-féle számjegy kerülhet. A második és harmadik helyre bármit írhatunk. Az utolsó helyre viszont muszáj 0-t írunk, ha még nem szerepelt. Így az eredményt a következő műveletsorral számíthatjuk ki:

$$\underbrace{9}_{\text{Az első helyre nem kerülhet 0}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10}_{\text{A középső két helyre bármilyen számjegy kerülhet}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Az utolsó helyre 0 kerül}}$$

Mit gondoltok erről a megoldásról?

Diák: Szerintem hibás. Most azokat a számokat számoltuk meg, amelyeknek az utolsó számjegye 0.

Tanár: És ez miért hiba?

Diák: Mert lehet valamelyik másik számjegy is 0. Nem biztos, hogy az utolsó az.

Tanár: Jó, ez igaz, de azt nem tudom, hogy a középső számjegyek mik. Az utolsó számjeggyel bebiztosítom, hogy legyen egy 0. Hol a hiba az én gondolatmenetemben?

Diák: Ha korábban már szerepelt 0, akkor az utolsó számjegy már bármi lehet.

Tanár: Azaz hogy nézne ki ennél a feladatnál a döntési fa?

Diák: Az utolsó elágazásnál 0-t kell írni, ha az ágon még nem szerepelt 0, de 10-féle számjegyből lehet választani, ha szerepelt. Azaz nem helyes az utolsó szorzás.

Tanár: Rendben, igazatok van, tényleg hibás ez a megoldás. De mit szólnátok, ha így javítanám ki: A 0 számjegy 3 helyre kerülhet. Írjuk le! Az első helyre 9-féle számjegy, a maradék két helyre 10-10 féle számjegy kerülhet. A kapott műveletsor:

$$\underbrace{3}_{\text{A 0 három helyre kerülhet}} \cdot \underbrace{9}_{\text{Az első helyre nem kerülhet 0}} \cdot \underbrace{10 \cdot 10}_{\text{A maradék két helyre bármilyen számjegy kerülhet}}$$

Sikerült javítanom a megoldásomat?

Diák: Nem, ez még most sem stimmel. Azokat a számokat, amelyekben több 0 is van többször számoltuk.

Tanár: Nagyon jó, igazad van. Hogyan lehetne ezt javítani?

Diák: Ki kellene vonni azokat, amiket kétszer számoltunk, mert két helyen is van bennük 0.

Tanár: És így már jó lesz?

Diák: Nem, mert most azokat, amelyekben három 0 is van azokat túl sokszor vontuk le. Szóval azok számát még hozzá kellene adni.

Tanár: Igen, így már tényleg ki lehetne a javítani a megoldásomat, de jó sokat kell számolgatni. Nincs valakinek más megközelítése?

Diák: Érdemes lenne inkább azokat a számokat megszámlálni, amelyekben nincs 0. Ez könnyű, mert minden helyre csak 9-féle számjegy kerülhet.

Tanár: És ez hogyan segítené minket a feladat megoldásában?

Diák: Ki kell vonni az összes négyjegyű számból az eredményt:

$$\underbrace{9 \cdot 10^3}_{\text{összes 4-jegyű szám}} - \underbrace{9^4}_{\text{0-t nem tartalmazó 4-jegyű számok}} = 9000 - 6561 = 2439$$

Módszertani megjegyzések

A hibás megoldások elővezetésekor alkatunktól függően színészkedhetünk, vagy hivatkozhatunk rájuk valamilyen mesehős (pl. Micimackó) megoldásaként.

A fenti feladat szitálással is megoldható (a túl sokszor számolt eseteket levonjuk), ha van rá idő, ezt a megoldást is megbeszélhetjük.

4. Hibakeresős feladatsor megoldása (10 perc)

Tanár: Az egyik legnehezebb dolog a kombinatorikában, hogy időnként könnyű okos, logikus hibákat vétetni, és nehéz észrevenni őket. Ilyen szép hibákat gyűjtöttem össze. Próbáljatok meg rájönni, hogy hol tévedett a feladat megoldója.

HIBAKERESÉS

Keressétek meg az alábbi feladatokra adott megoldásokban a hibát (mindegyikben van!), majd indokoljátok meg, hogy pontosan mi a hiba oka! Ezek után próbáljátok meg kijavítani őket, hogy helyes megoldásaitok is legyenek a feladatokra!

51. Egy gyümölcsészeti találkozón a pomológusok¹ 3 különböző almafajta terméseit kóstolhatják meg. Az első körben egy ember legfeljebb egy almát kóstolhat, de egy almából többen is ehetnek. Hányféleképpen alakulhat a kóstolás első köre, ha öten vesznek részt ezen a programon?

„Minden ember eldönti, hogy melyik almából szeretne enni. Tehát 3^5 -féleképpen.”

52. Hányféleképpen tudunk 2 lányt, 2 fiút és egy kutyát leültetni egy sorba, ha sem a lányokat, sem a fiúkat nem szeretnénk egymás mellé ültetni?

„5! az összes eset, vagyis amikor bárki bárki mellé ülhet. Azok a rossz esetek, amikor a lányok vagy a fiúk egymás mellett foglalnak helyet. $4! \cdot 2$ olyan eset van, amikor egymás mellett ülnek a lányok. Nyilván a fiúk esetén is. Tehát a válasz: $5! - 4! \cdot 2 - 4! \cdot 2$.”

53. Anna, Berci, Cili és Dénes gombászni mennek. Mivel a talált gombák közül biztosan csak a dióízű galambgombát, a nagy őzlábgombát, a májusi pereszket és a rozsdásszárú fülökét ismerik fel, így mindegyikük ezek közül választ egyet-egyet (természetesen ugyanazt a fajt többen is választhatják). Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha tudjuk, hogy végül összesen csak két fajtából szedtek?

„Először eldöntjük melyik legyen az a kettő faj, amelyből szedtek: ezt $\frac{5 \cdot 4}{2}$ -féleképpen tehetjük meg. Majd mind a négyük esetén 2-féleképpen döntünk, hogy a választott két gomba közül melyikből szed. Így tehát $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2^4$ az esetek száma.”

Módszertani megjegyzések

Sétáljunk körbe, szükség esetén segítsünk az elakadó diákoknak. Nem baj, ha nem minden megoldásnál jönnek rá a hibára, elég, ha egyet-kettőt megértenek.

5. Összefoglalás (10 perc)

Tanár: Zárásként szeretném összeszedni, hogy mi mindent tanultunk. Segítsetek összegyűjteni a legfontosabbakat!

Mivel foglalkoztunk?

Diák: Kombinatorikával.

Tanár: Milyen jellegű kérdésekkel, problémákkal foglalkozik a kombinatorika?

Diák: Hány eset van? Hány lehetőség van?

Tanár: Milyen módszerekkel oldottunk meg kombinatorika feladatokat? Mondjatok példát feladatra, amit az adott módszerrel oldottunk meg!

Diákok:

1. Leszámlálással. (Valamilyen logikus sorrendben felsoroltuk az összes esetet.)
2. Útvonalak megszámlálásával. (Lépésről lépésre válaszoltunk arra a kérdésre, hogy hány út vezet az adott pontba.)
3. Szorzással. (Pozitív egész számok szorzásával meg tudtuk oldani a feladatot.)
4. Analóg problémák megoldásával. (Át tudtuk fogalmazni a feladatot például egy útvonalas feladatra.)
5. Döntési fával. (A leszámmlálást segítheti, ha döntési fát készítünk. Időnként segít a szorzás megértésében, ha elképzeljük a döntési fát.)
6. Faktoriálisokkal. (n különböző elem lehetséges sorrendjeinek száma:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)$$

7. Ügyes módosításokkal. (Pl. osztással, komplementer módszerrel)

Tanár: Most vegyétek kezetekbe az első órán kitöltött totót! Nézzétek meg, hogy van-e olyan feladat, amit most már meg tudnátok oldani!

Diákok:

- Leszámlálással megoldható pl. 2-es;
- Szorzással megoldható pl. 3-as, 6-os, 7-es, $13+1$ -es;
- Analógiával megoldható pl. 12-es ($\rightarrow$ számoljuk meg, hogy hány vesztes van!);
- Ügyes módosítással megoldható pl. 5-ös.

Módszertani megjegyzés

Nem kell megbeszelnünk részletesen a megoldásokat, csak utalni rá, hogy most már van valamilyen használható módszerünk a feladatok megoldására.

6. Az óra lezárása (5 perc)

Tanár: A mai órán szép hibákkal foglalkoztunk, majd összefoglaltuk az eddig tanultakat. Ha van kedvetek, oldjátok meg a totó feladatai közül azokat, amelyekhez most már van módszerünk.

Módszertani megjegyzés

A témakörhöz készült egy tudáspróba is a nyolc óraterv anyaga alapján, ennek megírására sor kerülhet a következő órák valamelyikén.

Mellékletek

Hibakeresős feladatsor (51-53. feladat)

A feladatsorban három feladat szerepel egy-egy hibás megoldással. A diákoknak meg kell találniuk a gondolatmenet hibás pontját, és kijavítani a megoldást.

Fájlnév: [kombinatorika9_o8_melléklet_hibakeresős_feladatsor_51-53](#)

Nyomtatható táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [kombinatorika9_o8_táblázatos_óravázlat](#)