

VI. óra: Módosítsunk!

Az óra célja: Új feladatmegoldási módszer megismerése: kombinatorika feladatok megoldása ügyesen, szorzatok megfelelő módosításával.

Előzetes tudás: szövegértés, alpműveletek

Központi fogalmak: kombinatorika, faktoriális

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Osztály köszöntése, adminisztráció (hf. ellenőrzés)	frontális megbeszélés		5 perc
2.	Az előző órai feladatok egy részének megbeszélése	frontális megbeszélés		15 perc
3.	Hogyan módosítsunk? – feladatokhoz műveletsorok párosítása	páros munka	Módosítós feladatlap	15 perc
4.	A feladatok megbeszélése			5 perc
5.	Az óra lezárása, házi feladat kitűzése	tanári közlés	Lehetséges házi feladat: Gyakorló feladatsor	5 perc

Az óra előkészítése

- Módosítós feladatlap nyomtatása** (fejenként egy példány).
A dokumentumban található egy nehezebb és egy könnyített verzió is.
Fájlnév: [kombinatorika9_o6_melléklet_módosítós_feladatsor_43-48](#)
- Igény szerint **otthoni gyakorló feladatsor nyomtatása**.
Fájlnév: [kombinatorika9_o6_melléklet_gyakorló_feladatsor_49-50](#)

Az óra tartalma

1. Az előző órai feladatok egy részének megbeszélése (15 perc)

Fontos gondolatok felidézése és rögzítése: **faktoriális, szorzás alkalmazhatósága döntési fa esetén**

Tanár: A múlt órán megismerkedtünk a döntési fával. Levontuk azt a következtetést, hogy a kombinatorika feladatok egy részét meg tudjuk egyszerű szorzással oldani. Kiderült, hogy sorrendek számának meghatározásakor olyan szorzatokat kell kiszámítanunk, mint pl. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Hogyan jelöltük ezt a szorzatot röviden? Hogyan olvastuk ki ezt a jelölést?

Diák: $5!$, kiolvasása 5 faktoriális.

Tanár: Igen, jól emlékszel. Bizonyos feladatoknál viszont nem működik az egyszerű szorzás. Milyennek kellett lennie a döntési fának, hogy csak szorzással megoldhassuk a feladatot?

Diák: Az adott szinten minden ágnak ugyanannyi kisebb ágra kellett „szétválnia”.

Tanár: Igen, ha nem ilyen a fa, akkor bizony nem igaz az az érvelés, hogy bárhogy is „döntöttünk” elsőre, a következő döntésünk ugyanannyiféle lehet.

Első módosítási ötlet: összeragasztás

Például nézzük azt a feladatot (35. feladat), amelynek megoldását láttátok a múlt órán, csak most 4 személy helyett 5-re beszéljük meg: Andi, Benedek, Cili, Dóri és Endre moziba mennek. Hányféleképpen tudnak leülni 5 egymás melletti székre, ha Benedek és Cili ragaszkodnak hozzá, hogy egymás mellé kerüljenek?

Hogyan alakul a döntési fa?

Diák: Ha Andi ül az első helyre, akkor mellé még 4-en ülhetnek, de ha Benedek, akkor mellé csak Cili.

Tanár: Igen, tehát nem ugyanannyi módon folytathatjuk az egyes eseteket, szóval nem szorozhatunk ész nélkül. Van-e valakinek valamilyen mentő ötlete?

Diák: Mi lenne, ha Benedeket és Cilit „összeragasztanánk”?

Módszertani megjegyzések

Ez nagy ötlet, egyáltalán nem biztos, hogy lesz olyan diák, akinek eszébe jut. Segíthet, ha kihívunk 5 diákot, hogy játsszák el a szereplőket, és megkérjük őket, hogy kezdjék el leszámolni az eseteket. Így talán felvetődhet valakiben, hogy Benedek és Cili mindig együtt mozog. De nem kell erőltetni, az sem baj, ha mi áruljuk el ezt az ötletet.

Tanár: Nagyon jó ötlet! Így már meg tudjuk mondani, hányféleképpen ülhetnek le?

Diák: Így olyan, mintha csak 4-en lennének. $4! = 24$ lehetséges sorrendben tudnak leülni.

Tanár: Igen, de így most valóban minden lehetőséget megszámloltunk?

Diák: Nem mindegy, hogy Benedek Cili jobbján vagy balján ül. Ezt a számoláskor nem vettük figyelembe.

Tanár: És hogyan tudnánk ezt figyelembe venni?

Diák: Erről csak a sorrend kialakítása után döntünk: minden sorrend esetén kétféle döntést hozhatunk, úgyhogy szorzunk 2-vel!

Tanár: Akkor milyen műveletsorral tudnánk kiszámítani a feladat végeredményét?

Diák: $4! \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$

Tanár: Igen. Indokláskor megmagyarázzuk az egyes tényezőket így:

$$\underbrace{4!}_{\text{Sorbarendezések száma, ha B-t és C-t "összeragasztjuk"}} \cdot \underbrace{2}_{\text{B és C sorrendje}}$$

Második módosítási ötlet: komplementer (rossz esetek kivonása)

Most nézzünk meg egy másik feladat (36. feladat) módosítását: Kati különböző színű gyöngyökből nyakláncot fűz. Már csak 5 gyöngy maradt: egy sárga, egy piros, egy zöld, egy kék és egy fekete. Hányféle sorrendben fűzheti fel ezeket a lánc végére, ha semmiképpen sem szeretné, hogy a zöld és a kék gyöngy egymás mellé kerüljön?

Diák: Ez tulajdonképpen az előző feladat „fordítottja”. Mintha azt kérdeztük volna, hogy hányféle leülés lehetséges, ha Benedek és Cili semmiképpen nem szeretne egymás mellé kerülni.

Tanár: Nagyon jól észrevetted az analógiát! És van-e akkor ötletek, hogyan számolhatnánk?

Diák: Vonjuk ki az összes esetből imént kiszámolt esetek számát, hiszen most pont azok a „rossz esetek”!

Tanár: Nagyon jó!

$$\underbrace{5!}_{\text{5 gyöngy lehetséges sorrendjei}} - \underbrace{4!}_{\text{K és Z sorrendje}} \cdot \underbrace{2}_{\text{K és Z sorrendje}}$$

Sorbarendezések száma, ha a K és Z gyöngyöt "összeragasztjuk"

Érdemes megjegyezni ezt az ötletet, nagyon sokszor segít! Nem a „jó” eseteket számoljuk össze, hanem a „rosszakat” és kivonjuk őket az összes esetből. Ezt szokás komplementer módszernek is hívni. A „komplementer” szó azt jelenti „kiegészítő”. Hol találkoztunk már ezzel a kifejezéssel?

Diák: Halmazoknál.

Tanár: Bizony. Tulajdonképpen arról van szó, hogy a komplementer halmaz elemszámát határozzuk meg.

Harmadik módosítási ötlet: osztás („minden esetet kétszer számoltunk”)

Nézzünk még egy utolsó példát közösen, ez is egy múlt órai feladat (38. feladat) módosítása: Aranyhaj, Csipkerózsika, Hamupipőke, Hófehérke és a Gonosz Mostoha egy szűk ajtón át lépnek be a bálterembe. Hányféle sorrendben léphetnek be, ha a Gonosz Mostoha semmiképpen sem szeretne a nála sokkal csinosabb Hófehérke után érkezni?

Láttuk, hogy az előző feladatoknál picit módosítanunk kellett a szorzatokon. Meg tudjuk ezt is csinálni valamilyen ügyes ötlettel?

Diák: Igen, mert vagy Hófehérke érkezik előbb vagy a Gonosz Mostoha. Mindkét lehetőséghez ugyanannyi eset tartozik, úgyhogy most az összes eset számát eloszthatjuk 2-vel.

Tanár: Nagyon jó, ezt így írjuk fel:

$$\frac{5!}{2}$$

5 mesehős lehetséges sorrendjei
az esetek fele jó

Módszertani megjegyzések

Könnyen lehet, hogy az itt bemutatott ötletek nem jutnak a diákok eszébe. Ha van rá időnk, engedjük, hogy másképpen induljanak el, nézzünk meg más lehetséges megoldásokat is.

2. Hogyan módosítsunk? (15 perc)

Tanár: Párokat fogunk alakítani. Minden pár közösen fogja megoldani a kiosztott feladatlapot. A feladatlapon olyan feladatokat találtok, amelyek megoldása során az előbb megbeszélt feladatokhoz hasonlóan nem elég egyszerű szorzást végezni, hanem valahogyan módosítani kell.

A feladatlapon három oszlopot láthattok. Az elsőben vannak a feladatok, a másodikban műveletsorok, a harmadikban pedig ezeken elvégzendő módosítások.

Hármasokat kell kialakítanotok úgy, hogy összekötitek a feladatokat a megfelelő műveletsorokkal és azok megfelelő módosításával. Láthatjátok, hogy az oszlopokban nem azonos számú elem van: egy megoldás vagy módosítás több feladathoz is tartozhat.

Ha sikerült kialakítani a hármasokat, akkor írjátok le a feladatok megoldását a füzetetekbe indoklással úgy, ahogy a közösen megbeszélt feladatoknál láttuk. Jó munkát!

A diákoknak ehhez hasonló hármassokat kell kialakítani:

43. Egy nyolc fős baráti társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás történt összesen?	$F. 8 \cdot 7$	összunk 2-vel
--	----------------	---------------

Módszertani megjegyzések

Érdeemes a táblán rögzíteni a teendőket:

1. Hármassok kialakítása: feladat + művelet sor + helyes módosítás
2. Indoklások felírása a füzetbe.

Ha úgy látjuk megfelelőnek, akkor egy-két feladatot megbeszélhetünk közösen a feladatlapról, hogy a diákok egyértelműen értsék, mit várunk tőlük.

Módszertani megjegyzések

A páralakítás történhet elektronikus úton, például a <https://flippity.net/> oldal segítségével.

A pármunka során sétáljunk körbe, bizonyosodjunk meg arról, hogy minden csoport hozzákezdett a feladathoz, érti, hogy mit kell csinálni. Szükség esetén segítsünk kérdésekkel.

A feladatlapnak van egy egyszerűbb változata is, ahol csak a feladatokat kell a helyes (már módosított) művelet sorokkal összepárosítani. Ha úgy érezzük, hogy a csoport szintjének az megfelelőbb, válasszuk azt!

3. A feladatok megbeszélése (8 perc)

Tanár: Beszéljük meg közösen a feladatokat!

A feladatok részletes megoldásai megtalálhatóak a mellékletben.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán arról esett szó, hogy tudunk kombinatorika feladatokat megoldani úgy, hogy kisebb módosításokat végzünk szorzatokon. Megismerkedtünk a komplementer módszerrel is. A kiosztott feladatlapon olyan feladatokat találtok, amelyeket ezeknek az ötleteknek a segítségével tudtok megoldani.

Módszertani megjegyzés

Ez a megbeszélés a csoport szintjétől és a rendelkezésre álló időtől függ. Azokat a feladatokat mindenképpen beszéljük meg, amelyekkel több párosnak is gondja akadt!

Mellékletek

Módosító feladatsor (43-48. feladat)

A diákoknak hármasokat kell kialakítani 1. feladatokszövegekből, 2. képlettel megadott megoldásokból és 3. a még szükséges módosításokból. A könnyebbik verzióban csak a feladat szövegeket és a már módosított megoldásokat kell párosítani.

A dokumentum tartalmazza a feladatok részletes megoldásait is.

Fájlnév: [kombinatorika9_06_melléklet_módosító feladatsor 43-48](#)

Gyakorló feladatsor (49-50. feladat)

Otthoni vagy órai gyakorlásra szánt feladatsor.

A dokumentum tartalmazza a feladatok részletes megoldásait is.

Fájlnév: [kombinatorika9_06_melléklet_gyakorló feladatsor 49-50](#)

Nyomtatható táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [kombinatorika9_06_táblázatos óravázlat](#)