

V. óra: Döntési fa

Az óra célja: Döntési fa készítése, kombinatorika feladatok megoldása szorzással, analógiák felismerése.

Előzetes tudás: szövegértés, rendszerezés, normálalak

Központi fogalmak: kombinatorika, leszámlálás, döntési fa, faktoriális

Az óra felépítése

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Döntési fa készítése	frontális megbeszélés		8 perc
2.	Csoportfeladatok megoldása	szakértői mozaik – szakértői csoportok	Feladatlap szakértői mozaikhoz, A3-as lapok a döntési fákhoz	12 perc
3.	Feladatok bemutatása egymásnak	szakértői mozaik – vegyes csoportok		15 perc
4.	Sorrendek száma	frontális megbeszélés		8 perc
5.	Az óra lezárása, házi feladat kitűzése	tanári közlés	Gyakorló feladatlap	2 perc

Az óra előkészítése

- Feladatok nyomtatása** a szakértői mozaikhoz (a szakértői csoportok létszámának megfelelően, pl 16 fős szakértői mozaik esetén 4 példány).

A3-as méretű lapok a döntési fák felrajzolásához (minden szakértői csoportnak 1, pl 16 fős szakértői mozaik esetén 4 darab).

Csoportbeosztások előkészítése (például előzetes névsor elkészítése).

Fájtnév: [kombinatorika9_05_melléklet_szakertoi_mozaik](#)

- Igény szerint **otthoni gyakorló feladatsor nyomtatása.**

Fájtnév: [kombinatorika9_05_melléklet_gyakorlo_feladatsor_39-41](#)

Az óra tartalma

1. Döntési fa készítése (8 perc)

Tanári közlés: A mai órán egy új megközelítést beszélünk meg az esetek leszámlálására. Nézzük meg ehhez példaként az egyik múlt órán kitűzött feladatot (31-es feladat):

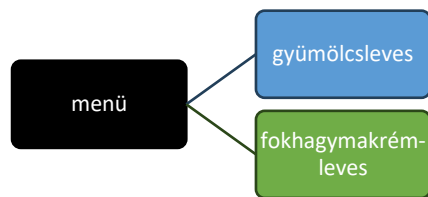
A menzán egy menü levesből, főételből és desszertből áll. A választék:

- Levesek: gyümölcsleves, fokhagymakrémleves
- Főételek: rakottkrumpli, pörkölt nokedlivel, bolognai spagetti, cézársaláta
- Desszert: zserbó, dobostorta, krémes

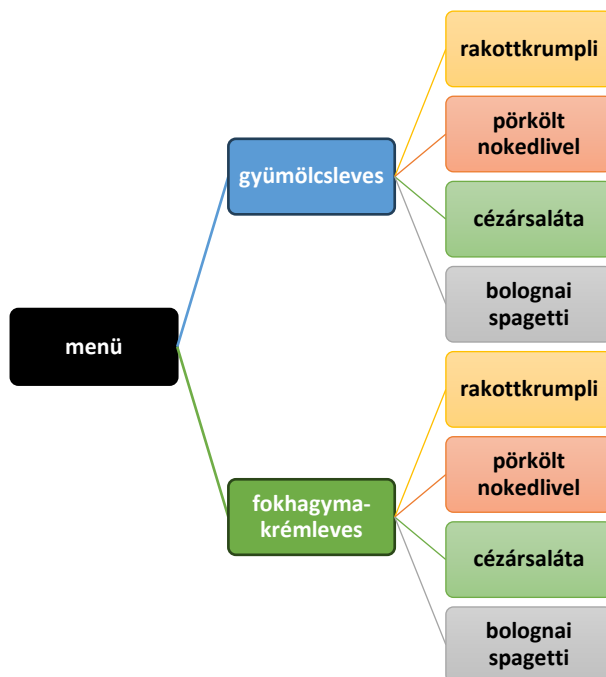
Hányféle összeállításból választhatunk?

A feladat megoldásához úgynevezett döntési fát fogunk készíteni. A lehetőségeket egy ábrán fogjuk számontartani.

Először kiválasztjuk a levest, két lehetőség közül választhatunk:



Utána kiválasztjuk a főételt. Bármelyik levest is választottuk, 4-féle főétel közül választhatunk.



Most minden leves-főétel választásnak egy balról jobbra tartó útvonal felel meg, azaz a döntési fa egy ága. Például, ha fokhagymakrémleves után bolognai spagettit eszünk, az az alsó ág legalsó elágazásának felel meg.

Meg tudjátok-e mondani, hogy összesen hányféle leves-főétel párost tudunk választani?

Diák: Ahány kisebb ágra válik szét a döntési fa, azaz ahány „végállomás” van a jobb oldalon.

Tanár: És ez hány lehetőség?

Diák: $4 + 4 = 2 \cdot 4 = 8$

Tanár: Hogyan folytatódna a döntési fa, ha desszert-választást is ábrázolnánk rajta?

Diák: Mivel bármely leves-főétel párosához 3-féle desszertből választhatunk, ezért minden ág végére 3 újabb elágazás kerülne.

Tanár: És akkor összesen hányféle menü közül választhatunk?

Diák: Háromszor annyiból, mint ahány leves-főétel párosból, azaz $8 \cdot 3 = 24$ -ből.

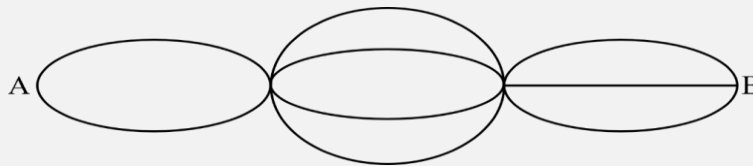
Tanár: Meg tudjuk-e adni ennek a feladatnak az eredményét egyetlen műveletssorral?

Diák: Igen: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Módszertani megjegyzések

Ha a csoport nehezen fogadja az utolsó lépést, akkor érdemes a döntési fa harmadik „szintjét” is megrajzolni.

Hasznos lehet átismételni, hogy ugyanezt a műveletssort korábban nem döntési fával, hanem útvonalas analógiával indokoltuk:



2. Szakértői mozaik – csoportfeladatok megoldása (12 perc)

Tanár: 4 fős csoportokat fogunk alakítani. Minden csoport kap egy feladatot, amelyhez döntési fát kell készítenie egy nagy papírra. A csoport tagjainak a fa segítségével kell megválaszolni kérdéseket. A feladat megoldására 10 percek van. Mindenki törekedjen arra, hogy aktívan részt vegyen a csoport munkájában, mert utána új csoportokban el kell mondanotok a megoldásaitokat.

Módszertani megjegyzések

A csoportalakítás történhet elektronikus úton (pl. a <https://flippity.net/> oldal „random name picker” elemével, ezen belül a „jigsaw groups” opciót használva), de például franciákártya segítségével is. Egy 16 fős szakértői mozaikhoz érdemes a 16 figurát kiosztani (bubi, dáma, király, ász – mind a négy színből). Ebben a körben azok alkotnak egy csoportot, akik ugyanazt a színt húzták.

Ha kisebb létszámú a tanulócsoport, akkor megfontolhatjuk az egyik feladat (3. csoport feladata) elhagyását. Ha pedig lényegesen nagyobb létszámú a csoport, akkor a szakértői mozaik két körben is megvalósítható, azaz két-két csoport ugyanazzal a feladattal foglalkozik. Törekedjünk arra, hogy ebben a körben a csoportok minél egyenlőbbek legyenek.

A csoportmunka során sétáljunk körbe, bizonyosodjunk meg arról, hogy minden csoport hozzákezdett a feladathoz, érti, hogy mit kell csinálni. Szükség esetén segítsünk kérdésekkel.

A szakértői csoportoknak ehhez hasonló feladatokat kell megoldani:

1. csoport (35. feladat)

a) Andi, Benedek, Cili és Dóri moziba mennek. Hányféleképpen tudnak leülni 4 egymás melletti székre?

Készítsetek döntési fát!

b) Hányféleképpen tudnak leülni egymás mellé, ha Benedek és Cili ragaszkodnak hozzá, hogy egymás mellé kerüljenek?

Jelöljétek egyértelműen az előbb elkészített döntési fán, hogy mely ágak felelnek meg ennek a feltételnek és melyek nem!

c) Melyik feladatot lehet egy egyszerű műveletsor eredményének kiszámításával megoldani? Hogyan?

Tanár: A döntési fákat ábrázoló plakátokat tegyék le az asztalra (*/helyezzétek el a terem falán!*). Az óra folytatásában új csoportokat fogunk alakítani, amelyek körbejárnak az egyes plakátok között.

3. Szakértői mozaik – feladatok bemutatása (15 perc)

Tanár: Most új csoportokat fogunk alkotni úgy, hogy minden csoportba kerüljön egy diák minden csoportból. Minden döntési fát ábrázoló plakátnál 3 percet lesz arra, hogy az adott fa készítője bemutassa a többieknek a feladatot, az elkészített fát, illetve a számításokat. Utána forogni fogunk, minden csoport egy új döntési fához megy. Ha egy-egy állomáson marad időtök, akkor elgondolkodhattok, hogy hogyan változnának a kérdésekre adott válaszok, ha a feladatoknak 4 helyett 5 „szereplője” lenne: azaz 5 mozizó, 5 gyöngy, 5 számjegy vagy 5 meshős.

Módszertani megjegyzések

Lehetséges módszer az új csoportok alakítására, hogy az eredeti csoport tagjai kiosztják maguk között az A, B, C és D betűket, majd az azonos betűket választók vannak egy csoportban. Vagy, ha az előbb franciakártyát használtunk, akkor most az azonos figurát húzók lehetnek egy csapatban.

4. Sorrendek száma (8 perc)

Tanár: Észrevettetek-e valamilyen rokonságot az eredeti feladatok között?

Diák: Mindegyikhez ugyanolyan döntési fát kellett készíteni./Mindegyiknek 24 lett a végeredménye.

Tanár: Vajon miért volt így?

Diák: Mert mindegyikben 4 különböző dolgot kellett sorbaállítani, és ezt 24-féleképpen lehet megtenni.

Tanár: Miért?

Diák: Mert a döntési fánk először 4, majd 3, végül 2, aztán 1 ágra "ágazik". A megfelelő műveletsor:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Tanár: Hogyan változik az eredmény 5 különböző dolgot állítunk sorba?

Diák: Most a döntési fa 5 ággal kezdődik, aztán minden ág 4 ágra oszlik stb. A műveletsor:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Tanár: Van-e valakinek ötlete, hogy hányféle eset lehetséges, ha 10 különböző dolgot kell sorba állítani?

Diák: Igen, a megfelelő műveletsor:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

De ezt már nem tudom fejben kiszámolni.

Tanár: Ez a műveletsor már olyan hosszú, hogy érdemes bevezetni rá egy külön jelölést:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Így olvassuk ki: tíz faktoriális.

Vajon mit jelent a $2024!$, kétezerhuszonnégy faktoriális?

Diák: Össze kell szoroznunk a pozitív egész számokat 2024 -től 1 -ig.

Tanár: Nagyon jó! És hogyan lehetne rövidíteni a táblán szereplő műveletsorokat?

Diák: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 = 4!$ és $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 = 5!$

Tanár: Becsüld meg, hogy a $10!$ hány jegyű szám! És a $100!$ esetén?

A számológéped ki tudja számítani ezeket. Keresd meg rajta a megfelelő gombot! Ha megvan, számítsd ki $10!$ és $100!$ értékét! Mit veszel észre?

Diák: $10! = 3\,628\,800$, azaz hétjegyű, de a $100!$ -ra „Error”-t ír ki.

Tanár: Bizony, a $100!$ túl nagy szám a legtöbb számológépnek, még normálalakban sem tudják kiírni. Ez azt jelenti, hogy több, mint 100-jegyű a szám. (Egyébként 158-jegyű, a számítógép/mobiltelefon könnyen kiszámítja.)

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán a döntési fával és a sorrendek számával foglalkoztunk. Egy új jelölést is bevezettünk – a faktoriálisét. Ezt gyakorolhatod a kiosztott feladatok megoldásával.

Módszertani megjegyzések

A következő óra elején 5 perc időkeret van szánva az adminisztratív teendőkre és a házi feladat ellenőrzésére, de a csoport igényeihez igazodva akár külön gyakorlóórát is beiktathatunk ezen a ponton.

Mellékletek

Feladatok a szakértői mozaikhoz (35-38. feladat)

Négy matematikailag azonos, de más szövegezésű feladat, amelyet a diákok szakértői csoportokban oldanak meg, majd az újraalakított csoportokban egymásnak mutatnak be.

Fájlnév: [kombinatorika9_05_melléklet_szakertoi_mozaik](#)

Gyakorló feladatsor (39-41. feladat)

Otthoni vagy órai gyakorlásra szánt feladatsor.

A dokumentum tartalmazza a feladatok részletes megoldásait is.

Fájlnév: [kombinatorika9_05_melléklet_gyakorlo_feladatsor_39-41](#)

Nyomtatható táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [kombinatorika9_05_tablazatos_oravazlat](#)