

III. óra: Útvonalak leszámmlálása

Az óra célja: Az útvonalak leszámmlálása módszerének megismerése.

Előzetes tudás: szövegértés, rendszerezés, alapműveletek

Központi fogalmak: kombinatorika, leszámmlálás

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Köszöntés, órakezdés, párok alakítása	tanári közlés		1 perc
2.	Jobbra-lefelé játék Nyerő stratégia keresése	pármunka	játéktáblák, korongok	9 perc
3.	Harmadik feladatsor Útvonalak leszámmlálásával megoldható feladatok	egyéni vagy pármunka	3. feladatlap, lapok a segítő kérdésekkel	33 perc
4.	<i>A feladatmegoldásba közbeszúrva:</i> Útvonalak leszámmlálásának egy módszere	frontális megbeszélés		~20 perc feladatmegoldás ~13 perc megbeszélés
5.	Az óra lezárása, házi feladat kitűzése	tanári közlés		2 perc

Az óra előkészítése

1. Jobbra-lefelé játék előkészítése (nyomtatás, korongok)

A diákoknak páronként szükségük lesz egy játéktáblára, valamint egy-egy korongra. Hatékonyan együttműködő csoport esetén a táblát nyomtatás helyett a füzetbe is lehet rajzolni. Korong helyett bármilyen apró tárgy is használható (pl radír, bábu).

Fájlnév: [kombinatorika9_03_melléklet_jobbra-lefelé_játék](#)

2. Harmadik feladatsor nyomtatása (fejenként egy példány).

Segítő kérdések nyomtatása és kivágása a feladatsorhoz (egy példány).

Óra előtt a kivágott segítő kérdések **kiragasztása a terem különböző pontjaira**.

Igény esetén **megoldásokkal ellátott feladatsor nyomtatása**, ez a tanári asztalon elhelyezhető, és a diákok elolvashatják, amikor szükségük van rá.

Fájlnév: [kombinatorika9_03_melléklet_feladatsor_20-26](#)

Az óra tartalma

1. Köszöntés, órakezdés, párok kialakítása (1 perc)

Tanári közlés: Az óra elején egy stratégiás játékot fogunk játszani. Ehhez alkossatok párokat!

2. Jobbra-lefelé játék (9 perc)

Tanári közlés: Kiosztok minden párnak egy 6×6 -os játéktáblát és egy korongot. Helyezzétek a korongot a játéktábla bal felső mezőjébe. Felváltva léptek majd a koronggal. A soron következő játékos egy lépésben jobbra vagy lefelé léphet akárhány mezőt (de csak az egyik irányba). Az a játékos nyer, aki a jobb alsó mezőbe lép. Próbáljatok meg rájönni, hogyan érdemes játszani ezt a játékot. Ha úgy gondoljátok, hogy már tudjátok, szóljatok, engem kell majd legyőznötök!

Módszertani megjegyzések

Ha egy páros hív minket, akkor kérdezzük meg tőlük, hogy kezdeni szeretnének-e vagy átadják a kezdés jogát nekünk. Ha valóban tudják a nyerő stratégiát, akkor a következő időkitöltő kérdéseket tehetjük fel nekik:

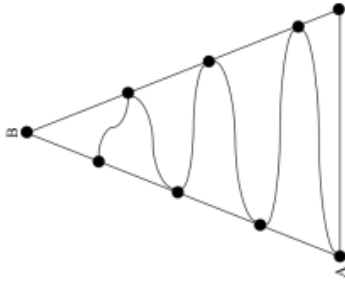
1. Melyik mezőből kellene indítani a játékot, hogy az első játékosnak legyen nyerő stratégiája?
2. Módosítsuk úgy a játékot, hogy az veszít, aki a jobb alsó sarokba lép. Kinek van most nyerő stratégiája?

Az eredeti játék és a módosított verziók nyerő stratégiája le van írva a `#k3_melléklet_jobbra-lefelé_játék` elnevezésű fájlban.

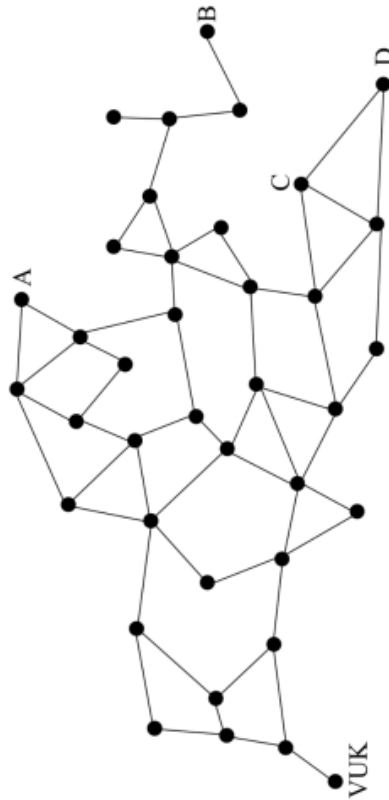
	1		1
	2		5
1	3	6	15
1		10	

23. Pisti kék színűre festi sárga dobókockájának két oldalát. Hányféleképpen teheti ezt meg?

24. Hányféle útvonalon juthatunk el A-ból B-be, ha nem haladhatunk lefelé?



25. Vuk egy mocsaras területen Tástra vadászik. Zsombékról zsombékra ugrálva, csendben közelíti meg gyanútlan áldozatát. Az alábbi ábrán a pontok a zsombékokat jelölik, a vonalak pedig azt, hogy melyikről melyikre tud átugrani hangtalanul. Melyik kaecskához (A, B, C, D) tud a legtöbbféle útvonalon eljutni, és hozzá hányféleképpen, ha csak balról jobbra ugrik?



26. Hányféle útvonalon juthat el a bábu egy 6×6-os játéktábla bal felső mezőből a jobb alsó mezőbe, ha a mozgás során csak jobbra és lefelé haladhat?

4. Útvonalak leszámmlálásának egy módszere (~15 perc)

Módszertani megjegyzések

Egy alkalmas pillanatban szakítsuk meg a feladatmegoldást, és beszéljük meg frontálisan az alábbi megoldási módszert!

Tanár: Meg szeretnék veletek beszélni egy megoldási módszert, amely segíthet, ha útvonalak számát kell meghatároznunk. Nézzük ehhez a 21. feladat b) részét! Hányféleképpen tudtátok kiolvasni a MINDIG szót az első táblázatból?

Diák: 10

Tanár: Hogyan határoztátok meg ezt a számot?

Diák: Leszámmlálással.

Tanár: Mire kell figyelni a leszámmlálásnál?

Diák: Hogy valamilyen rendszer szerint végezzük a számolást.

Módszertani megjegyzés

Most intsük türelemre azt, aki más (ügyesebb) módszert akar mondani.

Tanár: És mi volt a rendszer?

Diák: A „jobbra tarts” szabályt követtem. Először mindig jobbra léptem, ha lehetett.

JJLLL, JLJLL, JLLJL, JLLLJ, LJJLL, LJLJL, LJLLJ, LLJJL, LLJLJ, LLLJJ

Tanár: És hányféleképpen tudtátok kiolvasni az OKOSAN szót a következő táblázatból?

Diák: Azt is 10-féleképpen tudtuk.

Tanár: Miért?

Diák: Ezt is megszámoltuk.

Tanár: Ez persze jó, de volt közöttetek olyan, aki nem számolta meg? Hogyan lehet számolás nélkül válaszolni?

Diák: Ez a táblázat tulajdonképpen ugyanolyan, mint az előző, csak el van forgatva 90° -kal. Ugyanannyi útvonalat tudunk berajzolni.

Tanár: Ez nagyon szép gondolat! Sokszor fogunk kombinatorika problémát úgy megoldani, hogy találunk egy hasonló, analóg problémát, és arra hivatkozunk. És mi volt a helyzet a SZÁMOLJ szóval? Ott volt valakinek ügyes módszere?

Diák: A J betűbe csak valamelyik L betűből lehet lépni. Mindkét L betűbe 10-10 útvonal vezet (ezt láttuk az előző két táblázatban). Így összesen $10 + 10 = 20$ út vezet J-be.

Tanár: Hasonlóan gondolkodva nem tudtuk volna már a MINDIG szót tartalmazó táblázatnál is ügyesebben számolni?

Diák: Meg kellett volna állapítani, hogy hány út vezet a G melletti I betűkbe, és a két eredményt összeadni.

Tanár: És azt hogyan tudtuk volna megállapítani, hogy hány út vezet mondjuk a G fölötti I betűbe?

Diák: Össze kellett volna adni a tőle balra, illetve felette lévő D betűbe vezető utak számát.

...

Tanár: Úgy látom, kezd egy új leszámolási módszer körvonalazódni. Rajzoljuk le a füzetünkbe a MINDIG-hez tartozó 4×3 -as táblázatot. Minden mezőbe bele fogjuk írni pirossal, hogy hányféle úton lehet oda eljutni. Arra leszünk kíváncsiak, hogy a jobb alsó mezőbe hány útvonal vezet. Mit tölthetünk ki először?

Diák: A kiindulási mezőbe, a felső sor minden mezőjébe és a jobb szélső oszlop minden mezőjébe csak 1 útvonal vezet.

Tanár: Utána mit tudunk megállapítani? Hogyan folytassuk?

M_1	I_1	N_1
I_1	N	D
N_1	D	I
D_1	I	G

Módszertani megjegyzés

Érdemes többféle rendszert is meghallgatni.

Elvárt válasz: Az N betűbe csak a tőle balra, illetve felette lévő I-ből lehet eljutni. Mivel ezekbe 1-1 út vezet, ezért N-be $1 + 1 = 2$.

Hasonlóan gondolkodva a „felső” D-be $2 + 1 = 3$, a másikba $1 + 2 = 3$ útvonal vezet.

M ₁	I ₁	N ₁
I ₁	N ₂	D
N ₁	D	I
D ₁	I	G

M ₁	I ₁	N ₁
I ₁	N ₂	D ₃
N ₁	D ₃	I
D ₁	I	G

Hasonlóan gondolkodva a „felső” I-be $3 + 3 = 6$, a másikba $1 + 3 = 4$ útvonal vezet.

M ₁	I ₁	N ₁
I ₁	N ₂	D ₃
N ₁	D ₃	I ₆
D ₁	I ₄	G

M ₁	I ₁	N ₁
I ₁	N ₂	D ₃
N ₁	D ₃	I ₆
D ₁	I ₄	G ₁₀

Végül G-be $4 + 6 = 10$ útvonal vezet.

Módszertani megjegyzések

Érdemes lehet a táblázat kitöltésével párhuzamosan a megszámlolt utakat is berajzolni. Akár külön ábrát is használhatunk erre a célra.

5. Az óra lezárása, házi feladat kitűzése (2 perc)

Tanár: A mai órán útvonalak leszámmlálásról beszélgettünk, sorra megállapítottuk, hogy az egyes elágazási pontokba hány út vezet. Ez a módszer hasznos lehet hasonló feladatok megoldása során, érdemes megjegyezni. Ha jól alkalmazzátok, akkor azt is meg tudjátok mondani, hány útvonalon lehet eljutni a 6×6-os tábla bal felső sarkából a jobb alsó sarokba, ha csak jobbra és lefelé mozoghatunk. Ha maradt még feladat a mai feladatlapról, akkor otthon gyakorlásképpen gondolkodhattok rajta.

Mellékletek

Jobbra-lefelé játék (leírás és játéktábla)

Nyerő stratégiás játék, amelyben egy 6x6-os mezőn kell a játékosoknak felváltva lépni. A mellékletben a játék leírása mellett az alapjáték és a módosított verziók nyerő stratégiái is megtalálhatóak.

Fájlnév: [kombinatorika9_o3_melléklet_jobbra-lefelé_játék](#)

Harmadik feladatsor

Utak leszámmlálásával megoldható feladatok.

Fájlnév: [kombinatorika9_o3_melléklet_feladatsor_20-26](#)

Nyomtatható táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [kombinatorika9_o3_táblázatos_óravázlat](#)