

II. óra: Leszámlálás

Az óra célja: Egyszerű kombinatorikai feladatok megoldása leszámllálással.

Előzetes tudás: szövegértés, rendszerezés

Központi fogalmak: kombinatorika, leszámllálás

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Közös feladatmegoldás A múlt órán megismert PIN-kódos feladat megoldása, ennek kapcsán a leszámllálás módszerének rögzítése	frontális megbeszélés		8 perc
2.	Második feladatsor Leszámlálással megoldható feladatok	egyéni vagy pármunka	2. feladatsor, lapok a segítő kérdésekkel	25 perc
3.	A kockaszínezős feladat közös megoldása	frontális megbeszélés	polydron készlet / GeoGebra	10 perc
4.	Az óra lezárása, házi feladat kitűzése	tanári közlés		2 perc

Az óra előkészítése

- Második feladatsor nyomtatása** (fejenként egy példány).
Segítő kérdések nyomtatása és kivágása a feladatsorhoz (egy példány).
Óra előtt a kivágott segítő kérdések **kiragasztása a terem különböző pontjaira**.
Igény esetén **megoldásokkal ellátott feladatsor nyomtatása**, ez a tanári asztalon elhelyezhető, és a diákok elolvashatják, amikor szükségük van rá.
Fájlnév: [kombinatorika9_02_melléklet_feladatsor_11-19](#)
- Lehetőség szerint szemléltető eszköz előkészítése a kockaszínezős feladathoz, például **polydron készlet**, vagy **GeoGebra** kivetítési lehetőséggel.
Link: <https://www.geogebra.org/3d/hgmkqwc7>

Az óra tartalma

1. Egy feladat megoldása közösen (8 perc)

Tanár: Ezen az órán meg fogjuk beszélni a kombinatorika feladatok egyik lehetséges megoldási módszerét. Tekintsük a múlt órai feladatot: „Ági segít feledékeny nagypapájának kitalálni az elfelejtett négyjegyű PIN-kódját. Hány lehetőséget kell kipróbálniuk, ha azt tudják, hogy pontosan két darab 1-es számjegy van benne, és a számjegyek összege 6.” Hogyan kezdtetek hozzá ehhez a feladathoz?

Diák: Felsoroltuk az összes lehetőséget, majd megszámloltuk őket.

Tanár: Ezt a megoldási módszert **leszámlálás**nak nevezzük. Hogyan soroltátok fel az összes lehetőséget? Honnan tudtátok, hogy valóban az összeset felsoroltátok?

Diák: Valamilyen **rendszer szerint** végeztük a felsorolást.

Tanár: Ez nagyon jó! Például mi volt egy lehetséges rendszer?

Diák 1: A kód számjegyeit vizsgáltuk. Lehet 1,1,0,4 vagy 1,1,2,2. Mindkét típusból felsoroltuk növekvő sorrendben a számokat.

0114, 0141, 0411, 1014, 1041, 1104, 1140, 1401, 1410, 4011, 4101, 4110,

1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211

Diák 2: Az 1-esek helye szerint soroltuk fel a számokat: Először felírtuk azokat, amelyekben a két 1-es az első két helyen van, utána azokat, ahol az első és a 3. helyen...

1104, 1122, 1140, 1014, 1212, 1410, 1041, 1221, 1401, 0114, 2112, 4110, 0141, 2121, 4101, 0411, 2211, 4011

Módszertani megjegyzések

Mindenképpen hallgassunk meg több megoldást, több leszámhlási sorrendet. A második megoldás kapcsán előjöhet, hogy meg tudnánk egyszerűbben (felsorolás nélkül) is oldani a feladatot: az 1-eseket 6-féleképpen helyezhetjük el, és utána a maradék helyeket mindig 3-féleképpen tölthetjük fel, így összesen $6 \cdot 3 = 18$ megoldás van.

2. Leszámolással megoldható feladatok (25 perc)

Tanár: Ma ismét kaptok egy feladatlapot. A feladatokban közös, hogy mindegyiket meg lehet oldani **leszámolással**. Ügyeljenek rá, hogy a leszámolást valamilyen logikus rendben végezzétek, ne maradjanak ki esetek! És persze kíváncsi vagyok, hogy van-e esetleg valamilyen gyorsabb megoldási ötletetek.

20 perccel van a feladatokon gondolkodni. Dolgozhattok egyedül vagy párban!

A feladatok megoldásához kitettem a teremben **segítő kérdéseket**. Mindegyik feladathoz külön lap tartozik, rá van írva a feladat sorszáma és a feladat. Ha elakadtok a feladattal, keressétek meg a lapot, olvassátok el a segítő kérdéseket, próbáljatok meg rájuk sorban válaszolni. Ha továbbra sem boldogultok, kérjeteك segítséget tőlem. Jó munkát!

Módszertani megjegyzés

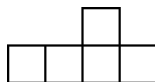
Sétáljunk körbe, nézzük, hogyan haladnak a diákok.

Ellenőrizzük az eredményeiket, jelezzünk vissza. Hallgassuk meg a gyorsabb megoldási ötleteiket.

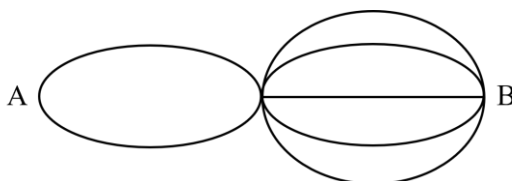
Ismét nyomtathatunk megoldásokkal ellátott példányt, amit kirakhatunk a tanári asztalra, vagy mi magunk adhatunk oda az elakadt csoportoknak.

2. FELADATLAP

11. Az ábrán egy kocka testhálójának egy része látható. Hányféleképpen egészíthetjük ki úgy, hogy a kapott alakzat egy kocka testhálója legyen?



12. Hányféle útvonalon juthatunk el A-ból B-be, ha csak balról jobbra léphetünk?



13. Pisti kék színűre festi sárga kockájának néhány oldalát: akár az összeset, akár egyiket sem. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha az egymásba átforgatható színezéseket azonosnak tekinti?

14. Néhány számkártyával játszunk, mindegyikből egy darab van.

- Hányféle háromjegyű szám rakható ki az 1, 2, 3, számkártyákból?
- Hány négyjegyű szám rakható ki a 1, 2, 3, 4 számkártyákból?

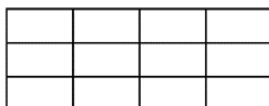
15. István, László, Piroska és Margit vidáman körtáncot lejtenek, amikor Erzsébet is csatlakozik hozzájuk. Hányféleképpen táncolhatnak így? Két elrendezést akkor tekintünk különbözőnek, ha valakinek megváltozik valamelyik oldali szomszédja.

16. Hányféleképpen olvasható ki a MATEK szó a táblázatból?

M	A	T	E	K
A	T	E	K	
T	E	K		
E	K			
K				

17. Hányféle nyakláncot fűzhetünk 2 piros és 10 fehér gyöngyből, ha a forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihető nyakláncokat nem különböztetjük meg egymástól?

18*. Hány téglalap látható az ábrán?



19*. Rajzoljuk le a kockának minél több különböző testhálóját!

3. A kockaszínezős feladat közös megoldása (10 perc)

Tanár: Meg szeretnék beszélni egy feladatot a feladatlapról: „Pisti kék színűre festi sárga kockájának néhány oldalát: akár az összeset, akár az egyiket sem. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha az egymásba átforgatható színezéseket azonosnak tekinti?” Hogyan kezdtetek hozzá?

Diák: Leszámlálással oldottuk meg a feladatot, felsoroltuk az összes lehetőséget.

Tanár: Milyen rendszer szerint soroltátok fel az összes lehetőséget?

Diák: A kék lapok száma szerint.

Tanár: Mivel kezdtétek? Hogyan folytattátok?

Diákok:

- Az első eset, hogy 0 kék lap van. Ez 1 lehetőség.
- A második, hogy 1 kék lap van, ez is 1 lehetőség.
- A harmadik, hogy 2 kék lap van. Ez 2-féleképpen lehet: a kék lapok lehetnek élszomszédosak vagy szemköztiek (nincs közös élük).
- A negyedik, hogy 3 kék lap van. Ez is 2-féleképpen lehet: a kék lapok egy közös csúcsban találkoznak vagy nem, azaz két szemközti lap szerepel közöttük.
- Az ötödik, hogy 4 kék lap van. Ekkor 2 sárga lap van, ez hasonlít arra az esetre, amikor 2 lap kék, amiről már láttuk, hogy 2-féleképpen lehetséges.
- A hatodik, hogy 5 kék lap van. Ekkor 1 sárga lap van, ez 1 lehetőség.
- Végül az utolsó, hogy minden lap kék, ez is egy lehetőség.

Ez összesen $1+1+2+2+2+1+1=10$ lehetőség.

Módszertani megjegyzések

Érdemes szemléltetni a lehetőségeket pl. Polydron készlettel vagy GeoGebra 3D-ben: <https://www.geogebra.org/3d/hgmkgwc7>.

Ha marad idő, további feladatokat is megbeszélhetünk, de most még a leszámolás legyen fókuszban.

4. Az óra lezárása, házi feladat (2 perc)

Tanár: A mai órán a leszámolásról beszélgettünk, és arról, hogy mennyire fontos, hogy valamilyen rendszer szerint végezzük, hogy ne maradjanak ki esetek. Ha maradt még feladat a mai feladatlapról, akkor otthon gyakorlásképpen gondolkodhattok rajta.

Mellékletek

Második feladatsor (11-19. feladatok)

Leszámlálással megoldható kombinatorikai feladatok. A témakörön belül a feladatok számozása folytatólagos, ez a feladatsor az 11-19. feladatokat tartalmazza.

Fájlnév: [kombinatorika9_o2_melléklet_feladatsor_11-19](#)

Nyomtatható táblázatos óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [kombinatorika9_o2_táblázatos_óravázlat](#)