

VI. óra: Cserepezzünk, szigeteljünk!

Az óra célja: Elsajátított ismeretek és fejlesztett készségek megerősítése és alkalmazása különböző gyakorlati – területszámítással kapcsolatos – feladatokban.

Előzetes tudás: síkidomok (téglalap, kör, trapéz) területének kiszámítása, Pitagorasz-tétel

Központi fogalmak: területszámítás

Motiváció és koncepció

Az elmúlt öt órában nagy utat jártunk be, a kezdeti manuális tapasztalatszerzéstől térszemléletet fejlesztő feladatokon keresztül jutottunk el ahhoz, hogy távolságokat, hosszakat tudjunk számolni a térben. Ezen az órán szeretnénk a legutóbb szerzett számolási tapasztalatokat a kezdeti tetőfedési tevékenységgel összekötni, és néhány tetővel kapcsolatos számítási feladatot elvégezni. A legjobb persze az, ha a diákok ezeket a feladatokat minél inkább maguk tudják megoldani, de akkor is hasznos végigcsinálni őket, ha több tanári segítségre, több frontális megbeszélésre van közben szükség. A csoport szintjétől függő óravezetési alternatívákról az óravázlatban részletesen írunk majd.

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Bevezetés Az elmúlt órák kulcsgondolatainak felidézése			
2.	Feladatmegbeszélés Az előző óra zárófeladatának megbeszélése			10 perc
3.	Cserepezzünk és szigeteljünk – feladatmegoldás, első rész	Páros munka	Feladatlap	15 perc
4.	Cserepezzünk – feladatmegoldás, második rész	Frontális munka vagy páros munka	Feladatlap, tábla, kréta	15 perc
5.:	Az óra lezárása			5 perc

Az óra előkészítése

- Feladatlap nyomtatása** (fejenként)
Fájlnév: # tg6_melléklet_órai feladatlap
- Igény szerint segítő kártyák nyomtatása és felvágása** (páronként egy csomag)
Fájlnév: # tg6_melléklet_segítőkártyák
- Igény szerint gyakorló feladatsor nyomtatása** a további elmélyedéshez
Fájlnév: # tg6_melléklet_további térgeometriai feladatok

Az óra tartalma

1. Bevezetés (3 perc)

A tanár üdvözlí a diákokat, néhány kérdéssel átbeszéli velük, hogy mi mindennel foglalkoztak az elmúlt néhány órában. A beszélgetés folyamán mindenképpen hangsúlyosan jelenjen meg az elmúlt óra anyaga, többek között az alábbi fontos tudáselemek:

- Pitagorasz tétele, alkalmazása térben.
- Síkmetszetek, lapok kirajzolásának fontossága, hogy el ne rontsuk a számolást.
- A legrövidebb út megtalálásához háló rajzolása.

E tudáselemek összegyűjtése után térjünk rá az előző óra zárófeladatának megbeszélésére. Azért, hogy mindenki felidézhesse a feladatot, érdemes arra kérni egy kiválasztott diákot, hogy a saját szavaival próbálja összefoglalni, mi is volt a feladat.

2. Az előző óra zárófeladatának megbeszélése (7 perc)

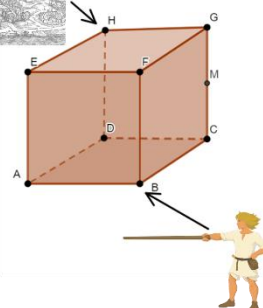
Módszertani megjegyzések

A feladat újbóli kivetítését nem tartjuk szükségesnek, a szükséges ábra táblára felvázolása bőven elegendő.

A feladat megbeszélésének folyamán jó, ha minél több diák szóhoz jut, egy-egy ábrarészlet kirajzolásával, egy-egy részszámítás diktálásával.

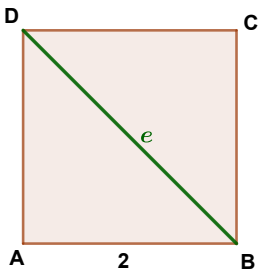
Feladat: Egy kocka alakú bolygó neve Hexaédria, élei 2 km-esek. Toldi és Buda két áttellenes csúcson helyezkedik el. Milyen hosszú a köztük futó legrövidebb út, mely

- a bolygó belsejében vezet?
- a bolygó külsején vezet?
- Hányféle módon juthatunk a bolygó külsején haladva Tolditól Budára, ha a lehető legrövidebb úton haladunk?



Megoldás:

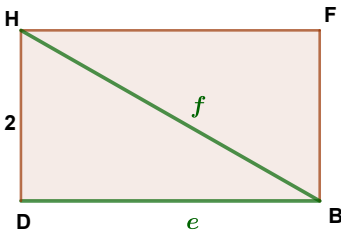
a) A legrövidebb út a bolygó belsejében nyilván a HB szakasz, ennek a kiszámításához olyan síkmetszetet kell találni, amely tartalmazza ezt a szakaszt. Erre a célra tökéletes a HDBF téglalap, amelyben a HB szakasz hossza Pitagorasz tételével számolható. A részletszámolásokat az alábbi táblakép mutatja:



ABD $\triangle$ -ben Pitagorasz-t:

$$2^2 + 2^2 = e^2$$

$$e = \sqrt{8} \approx 2,83 \text{ km}$$



DBH $\triangle$ -ben Pitagorasz-t:

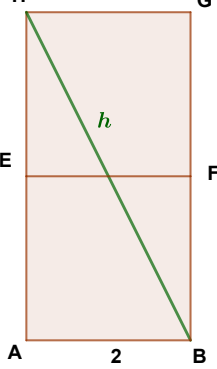
$$2^2 + e^2 = f^2$$

$$2^2 + \sqrt{8}^2 = f^2$$

$$f = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ km}$$

b) Próbáljunk a kiterített hálóban gondolkodni, hogy alkalmazhassuk a „két pont között a legrövidebb út az egyenes” elvét. Ehhez terítsük egymás mellé az ABEF és az EFGH, vagy a BCFG és az EFGH négyzeteket, majd ezekben számoljuk ki a BH szakasz hosszát. A részletszámításokat az alábbi táblakép tartalmazza. A táblakép másik oldala tartalmazza azt a hatféle egyforma hosszúságú legrövidebb utat, melyek mind megoldásai a b) feladatnak. Nem biztos, hogy ezt érdemes ebben a formában a táblára felrajzolni, sokkal szemléletesebb, ha egy kellően nagy kockán mutogatják végig a diákok a lehetséges útvonalakat.

b)



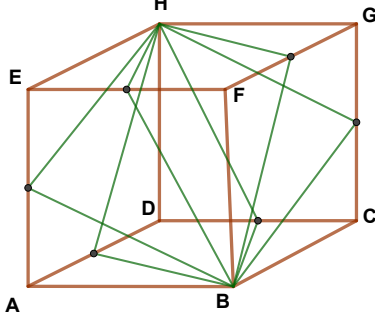
ABH $\triangle$ -ben Pitagorasz :

$$2^2 + 4^2 = h^2$$

$$e = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ km}$$

c)

hat különböző azonos hosszúságú legrövidebb útvonal



Módszertani megjegyzések

A c) feladat eredménye elsőre elég meglepő lehet, hiszen megszoktuk a síkon, hogy két pont között mindig egyértelműen van legrövidebb út. Emiatt ez a feladatrész erősen szemléletformáló hatású, az eredmény akár így is tálalható: ha a király szeretne futóversenyt rendezni hat küldönce között B-ből H-ba, akkor a küldöncök tudnak, egymástól teljesen elkülönülő, de „egyforma” útvonalon haladni.

Érdekes feltenni azt a kérdést is, hogy tudnak-e a diákok olyan alakzatot mondani, ahol két pont között végtelen sok legrövidebb út van?

2. Újítsunk tetőt és szigeteljünk – 1-2. feladat (15 perc)

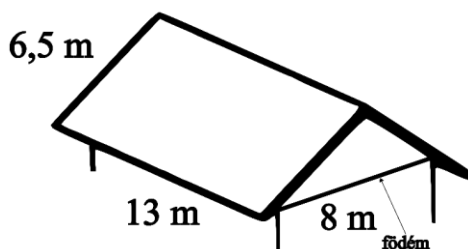
A következőkben egy tetőfelújítási feladatcsomagon dolgoznak a diákok. Az első feladatban nyeregtetővel kell dolgozni, a másodikban kontytetővel, emiatt az előbbi lényegesen egyszerűbb, mint az utóbbi. Fontosnak tartjuk, hogy ez a két számítás alaposan ki legyen elemezve, a főbb gondolatai össze legyenek foglalva, és minden diák rendesen lejegyeztesse az ábrákat és megoldásokat.

Az első feladatot ezért kiadjuk páros feladatmegoldásra, valószínűleg a diákok maguktól is el tudnak indulni vele. A szükséges megbeszélés mennyisége és mélysége nagyban függ a csoporttól. Elképzelhető, hogy az eredmények ellenőrzése után mindenki lendületből térhet rá a második feladatra, de az is lehet, hogy érdemes a két feladat közé részletes megbeszélő etapot iktatni.

Tanár: Ahogy az előbb visszaemlékeztünk rá, a térgeometriai vizsgálódásainkat barkácsolással kezdtük, tetőt próbáltunk készíteni. Az azt követő órákon megpróbáltunk minél nagyobb gyakorlatot szerezni a térbeli alakzatok elképzelésében, lerajzolásában, így jutottunk el az előző óráig, amikor először kezdtünk el távolságokat számolni térbeli testekben.

A mai órán visszatérünk a tetőkhöz, és megnézzük, hogy az azóta felgyűlt tapasztalatainkat tudjuk-e alkalmazni tetőfedéssel kapcsolatos számítások elvégzéséhez. Egy feladatlapot fogok kiosztani, álljatok neki padtársatokkal az első feladatnak, ha megvagytok, és ellenőriztem, hogy jók-e az eredményeitek, mehettek tovább a második feladatra.

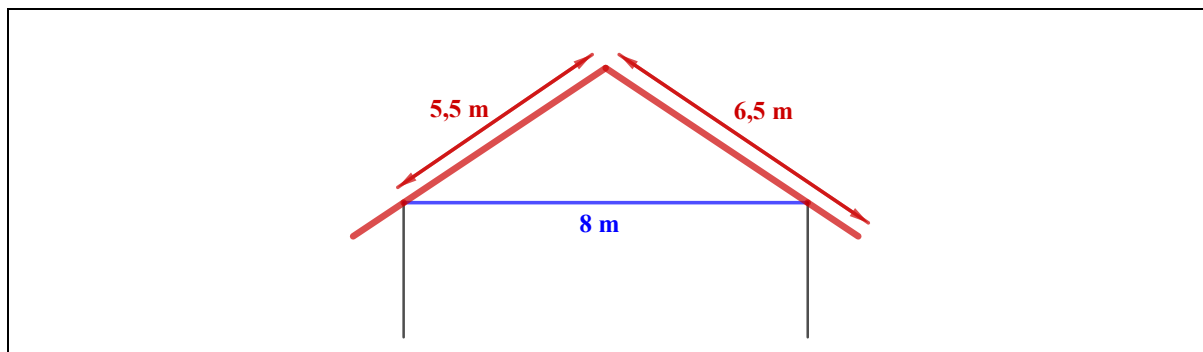
1. a) Egy házfelújítás kezdő lépéseként a nyeregtetőnk külső borítását (szakszóval: héjazatát) szeretnénk modernizálni: a palatetőt cserépre cseréljük. Az alábbi ábrák adatai használatával határozzuk meg, hogy mekkora területet kell lefedni cseréppel!



Megoldás:

A nyeregtetőt két azonos (egybevágó) téglalap alkotja, így elég az egyik területét meghatározni. Az ábra alapján a téglalap két oldala 6,5 méter és 13 méter, így területe $6,5 \cdot 13 = 84,5 \text{ m}^2$. Tehát a teljes tető területe $(6,5 \cdot 13) \cdot 2 = 169 \text{ m}^2$

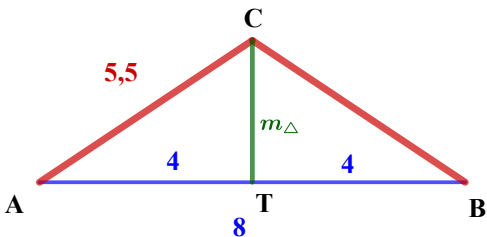
b) Ahogy az alábbi terv mutatja, a tető túlnyúlna az oldalfalakon 1 méternivel. Számoljuk ki, hogy milyen magasan lesz a tető legmagasabb pontja a földem síkjához képest! (Földemnek nevezzük azt a vízszintes síkot, amin a tető nyugszik.)



Megoldás:

Az előlnézeti ábrát használva bontsuk fel az egyenlő szárú háromszöget két derékszögű részre. A derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $m = \sqrt{5,5^2 - 4^2} = 3,77$ méter.

Fontos kérdés, hogy a megoldásról készülő jegyzet milyen részletességű legyen. Egy átlagos képességű csoportnál a fenti ábrán kívül az alábbi táblaképet célravezetőnek tartjuk:



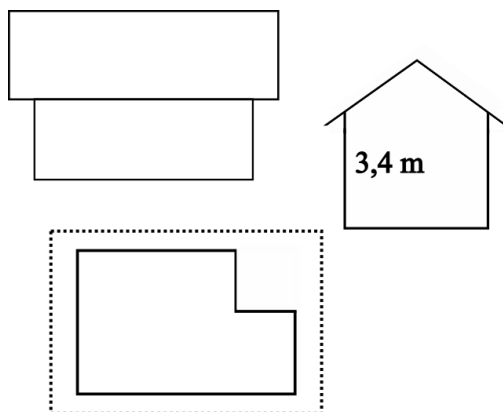
ATC Δ-ben Pitagorasz-t:

$$m_{\Delta}^2 + 4^2 = 5,5^2$$

$$m_{\Delta}^2 = 5,5^2 - 4^2 = 14,25$$

$$m_{\Delta} = \sqrt{14,25} \approx 3,77 \text{ méter}$$

2. A felújítás következő fázisában szigetelni szeretnénk a házunk falát, amely előlnézete, oldalnézete és alaprajza (azaz felülnézete) az ábrákon látható. A szigetelés tervezett vastagsága 20 cm, egy ajtónk és öt ablakunk van, melyek mindegyike körülbelül $2,6 \text{ m}^2$. A ház sarkainál szükség van „túllógásra” is.



- Tippeljük meg, hogy körülbelül hány négyzetméter szigetelőanyagra lesz szükség!
- Számolás segítségével adjunk (minél kisebb) felső becslést a szükséges szigetelőanyag területére.

Megoldás:

A ház fala 6 darab téglalapból áll össze. Nem ismert két falrész mérete, de ez nem probléma: a falak területeinek összege ugyanannyi, mintha téglalap alakú lenne a ház alaprajza. Azaz a teljes falfelület $2 \cdot (8 \cdot 3,4 + 13 \cdot 3,4) = 142,8 \text{ m}^2$.

Ehhez hozzá kell adnunk a ház sarkainál szükséges túllógásokat. 5 saroknál kell további 20 cm-nyi szigetelést túllógatnunk a ház síkján, egy saroknál (az alaprajzon látható beszőgellésnél) viszont 20 cm-vel kevesebb anyagra lesz szükség. Így tehát a sarkok miatt összesen további $(5 - 1) \cdot 0,2 \cdot 3,4 = 2,72 \text{ m}^2$ -rel kell számolnunk.

Végül ebből még le kell vonnunk a – le nem fedett – nyílászárók területét, amely legfeljebb $2,6 \cdot 6 = 15,6 \text{ m}^2$.

Így a $142,8 \text{ m}^2 + 2,72 \text{ m}^2 - 15,6 \text{ m}^2 = 129,92 \text{ m}^2$, azaz körülbelül 130 m^2 becslés adódik.

3. Újítsunk tetőt – 3. feladat (15 perc)

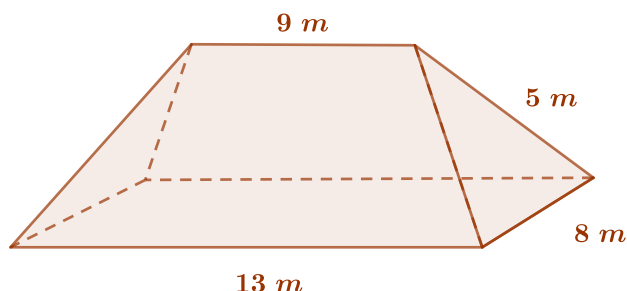
Módszertani megjegyzések

Ebben a részben egy lényegesen összetettebb, kontyvetős feladattal fogunk megbirkózni. Hogy ez mennyire okoz nehézséget a diákoknak, az igen változó lehet. Emiatt különböző óraszervezési módszerekre is javaslatot teszünk, melyek közül a tanár kiválaszthatja azt, amely leginkább illeszkedik a csoport szintjéhez. Illetve, ha a csoport heterogén, ezeket vegyítheti is. A három javasolt óraszervezési módszer:

- A) Páros munka minimális segítséggel. A diákok páros munkában dolgoznak tovább a 2. feladaton, esetleges elakadás esetén segítjük őket, akár a „Segítő kérdések” kártyákon található kérdésekkel. Ezt a munkaformát önálló és jóképességű csoportnak ajánljuk.
- B) Páros munka segítő kártyák használatával. A diákok páros munkában dolgoznak tovább, de minden pár kap egy segítő kártyákból álló kupacot. A kártyakupacban kártyaként található egy-egy újabb, egyre nagyobb segítség. Ha valahol elakadt egy páros, fordítsa meg a legfölül lévő kártyát, és az remélhetőleg ötletet ad a folytatásra. Ha a segítség nem elég, fordítsák meg a következőt stb. Így a diákok úgy kapnak ötletet a továbblépésre, hogy nincs szükség a tanár jelenlétére. Ezt a munkaformát olyan csoportnak ajánljuk, ahol már elég jó a diákok térszemlélete, és Pitagorasz tételét is magabiztosan használják, de egy hosszabb gondolatmenet végigvitelére nem feltétlen képesek egyedül. A segítő kérdéseket a #tg6_melléklet_segítő kártyák fájl tartalmazza.
- C) Frontális ötletelés. A tanár a diákokkal közösen gondolkodik a táblánál, őket folyamatosan támogatva. Semmiképpen nem ő magyaráz végig, hanem beszélget, ötletel, a táblai ábrába berajzoltat, és a közös gondolkodás frontálisát is időről-időre megtöri egy-egy egyéni számolnivalóval.

A feladat:

3. Amikor a tető korszerűsítését terveztük, elgondolkodtunk azon, hogy kicseréljük a nyeregtetőt kontytetőre. A tető alapját képező téglalap (a földem) $8\text{ m} \times 13\text{ m}$, a ferde tetőélek hosszát 5 méteresre tervezzük, a legfelső vízszintes él hosszát pedig 9 méteresre. Ebben az esetben az előző feladathoz képest a tető elhanyagolható mértékben nyúlna túl az oldalfalak síkján.



- Rajzold le a kontytető előlnézetét, oldalnézetét és felülnézetét!
- Számold ki a cserepezendő felszín nagyságát!
- Fel tud-e egyenesedni a tető alatt a 185 cm magas Jancsi, ha a földemen (tehát a tető alapját képező téglalapon) áll?

Megoldás:

- a) A megfelelő nézetek:



Előlnézet



Oldalnézet

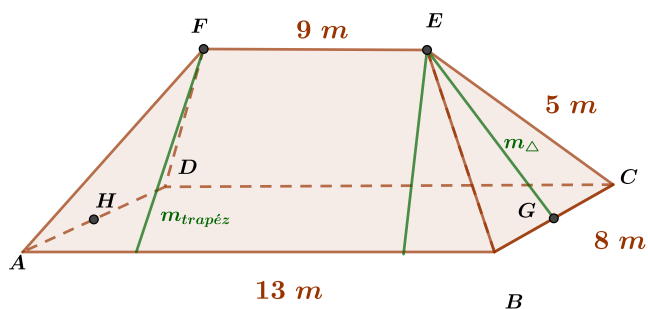


Felülnézet

- b) A cserepezendő felszín két trapézból és két háromszögből áll:

$$A = 2 \cdot T_{\text{trapéz}} + 2 \cdot T_{\text{háromszög}}$$

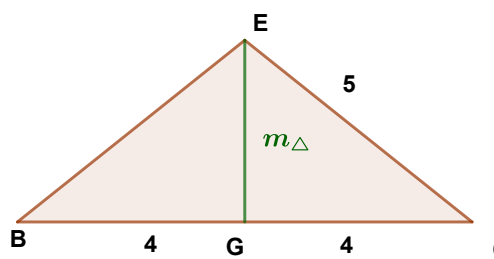
A háromszög egyenlő szárú, alapjához tartozó m_1 magasságát Pitagorasz-tétellel kiszámíthatjuk a szimmetriatengely berajzolása után: $5^2 = m_{\Delta}^2 + 4^2$, amiből $m_{\Delta} = 3\text{ m}$. Egy háromszöglap területe ezalapján $T_{\Delta} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12\text{ m}^2$.



A trapéz alakú oldallap területét úgy számíthatjuk ki, ha merőleget állítunk a rövidebbik alap végpontjaiból a hosszabb alapra. Így a trapéz két „szélén” derékszögű háromszögek keletkeznek. Ezekben a derékszögű háromszögekben Pitagorasz tételét felírva kapjuk, hogy $m_{\text{trapéz}} = \sqrt{21} \approx 4,58\text{ m}$, melyből tovább számolva $T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m_{\text{trapéz}} = 11 \cdot \sqrt{21}\text{ m} \approx 50,4\text{ m}^2$.

A két trapéz és a két háromszög területét összeadva adódik, hogy a cserepezendő felszín $124,8\text{ m}^2$.

Fontos kérdés, hogy a megoldásról készülő jegyzet milyen részletességű legyen. Egy átlagos képességű csoportnál a fenti ábrán kívül az alábbi táblaképet célravezetőnek tartjuk:

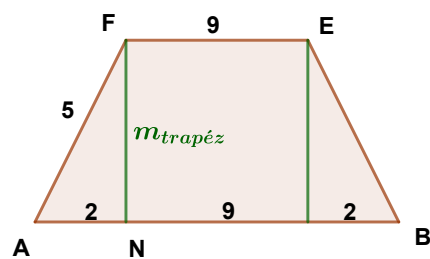


BGE $\triangle$ -ben Pitagorasz-tétel:

$$4^2 + m_{\Delta}^2 = 5^2$$

$$m_{\Delta} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$T_{\Delta} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{ m}^2$$



ANF $\triangle$ -ben Pitagorasz-tétel:

$$2^2 + m_{\text{trapéz}}^2 = 5^2$$

$$m_{\text{trapéz}} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \approx 4,58$$

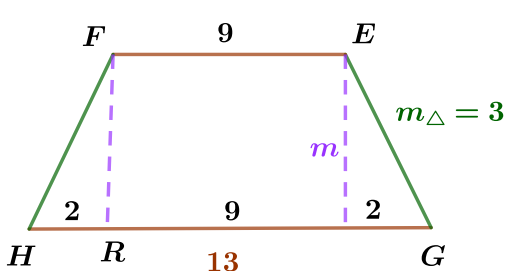
$$T_{\text{trapéz}} = \frac{9 + 13}{2} \cdot \sqrt{21} \approx 50,4 \text{ m}^2$$

$\Rightarrow A = 2T_{\Delta} + 2T_{\text{trapéz}} = 124,8 \text{ m}^2$

Megoldás (folytatás):

- c) A tető magassága legkönnyebben a test előlnézetéből számítható, melyet a test ábrájában is megjelölhetünk a HGEF trapéz berajzolásával. A trapéz alapjai 13 m valamit 9 m, a szárai pedig $m_{\Delta} = 3 \text{ m}$ hosszúak. Pitagorasz tételét a HGEF trapéz m magasságát az előző részben ismertetett módon számolva kapjuk, hogy $m = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ m}$. Tehát Pisti fel tud egyenesedni a tető alatt.

A feladat megoldásának egy lehetséges táblaképe:



HRF $\triangle$ -ben Pitagorasz-tétel:

$$m^2 + 2^2 = 3^2$$

$$m = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ méter}$$

$\Rightarrow$ Fel tud egyenesedni Pisti

Módszertani megjegyzések

Hasznosnak találjuk, ha a feladat megoldását egy olyan páros, aki hamar készen van, a táblára is felírja. A megoldásukat közösen végig tudjuk beszélni: mit milyen részletességgel érdemes/kell leírni, lerajzolni. A megbeszélésen túl azért is hasznos egy táblai megoldás, mert az elakadók le tudják írni róla azt, ami hiányzik.

Mivel a második feladat összetettségében messze az eddigiek felett állt, érdemes egy kis időt hagyni arra is, hogy a feladat befejezése után közösen összefoglaljuk a számolásunk menetét, áttekintve a nagyobb lépéseket. Akár össze is hasonlíthatjuk, hogy a kétféle tető közül melyiknek mennyivel nagyobb a felszíne stb .

4. Az óra lezárása (5 perc)

Mivel ez az óra a térszemléletet fejlesztő blokkot lezáró óra, hasznos, ha a diákokat kérdezgetve közösen vesszük át, hogy mi mindennel foglalkoztunk az elmúlt hat órában. Tudatosítsuk bennük, hogy egészen egyszerű dolgoktól (nézetek, darabszámok) jutottunk el odáig, hogy hogyan kell távolságokat számolni térben, és ezt a tudást hogyan lehet felhasználni gyakorlati problémák megoldására.

Módszertani megjegyzés

Az itt kidolgozott hatodik, blokkot lezáró óra után hasznosnak tartjuk egy gyakorló óra beiktatását. Ehhez bőséges feladatanyagot találunk a korábbi feladatlapokon, illetve az ehhez az órához tartozó feladatlapon egyaránt. Javasoljuk, hogy a gyakorló órán a diákok többször dolgozzanak egyedül, hogy kiderüljön számukra, mire jutnak, ha nincs külső segítség.

Mellékletek

Feladatsor

Közös órai feldolgozásra szánt feladatsor, amelynek során a megszerzett térgeometriai ismereteket való életből vett problémákra, nevezetesen különféle tetők cserepezésére és házfalak szigetelésére kell alkalmazni. A dokumentum nem tartalmaz megoldásokat, mivel ezt az óravázlatban közöljük.

Fájlnév: # tg6_melléklet_feladatlap

További térgeometriai feladatok

Egy térgeometriai feladatokat tartalmazó feladatsor, amely alkalmas lehet a témakör folytatására, akár a következő órákon, akár a későbbiekben.

Fájlnév: # tg6_további térgeometriai feladatok

Nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: # tg6_táblázatos óravázlat