

V. óra: Útvonalak a Kocka-bolygón

Az óra célja: Pitagorasz tételének gyakorlása térbeli ábrákon, síkmetszetek gyakorlása.

Előzetes tudás: Pitagorasz-tétel, testek hálója

Központi fogalmak: Pitagorasz-tétel, síkmetszet, útvonal hossza

Motiváció és koncepció

Az előző négy órán nagyon kis (matematikai) eszközigényű feladatokkal dolgoztunk, darabszámokat számoltunk, testhálókat készítettünk, bőségesen hagyva időt a térszemlélet fejlesztésére. Mostanra elérkezettnek látjuk az időt, hogy elkezdjünk hosszokkal, távolságokkal foglalkozni a térben a Pitagorasz-tétel segítségével. Ezzel egyben a felszín- és térfogatszámítás irányába is elindulunk.

Visszatérő probléma, hogy amikor a diákok gúlákkal dolgozva felszínt és térfogatot számolnak, könnyen zavarodnak bele abba, hogy mikor milyen síkmetszetet használnak, összekeverik a test magasságát az oldallap magasságával, stb. Az óra kulcsfeladata azt célozza meg, hogy erről a problémakörrel minél erősebb, kézzelfogható tapasztalata legyen a tanulóknak.

A számolásokhoz Pitagorasz-tételét használjuk, mindig konkrét számokkal, azaz a tétel ismereténél nem szükséges több előismeret a feladatok megoldásához. A feladat megoldásához használni fogjuk azokat a gúlákat, amelyeket korábban készítettek a diákok.

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Bevezetés			1 perc
2.	Bolygóbarangoló játék	irányított	tábla, kréta	10 perc
3.	Keressünk minél rövidebb utat!	felvezetés után páros munka váltakozva	tábla, vetítő	6 perc
4.	Tapasztalatok megbeszélése	frontális	nagy gúla	6 perc
5.	Keressük a legrövidebb utat! – folytatás	egyéni	tábla, vetítő	5 perc
6.	Tapasztalatok megbeszélés	frontális		5 perc
7.	Feladatmegoldás, az óra lezárása	páros munka		10 perc

Az óra előkészítése

- Vetítés előkészítése** a „Melyik út megyen itt Budára?” feladathoz
Fájlnév: [térgeometria9_05_melléklet_útvonalak_bolygókon](#)
- Gúlákat és kockákat előkészítése.** Az órai feladatokhoz hasznos, ha a diákok kézbe tudják venni a korábban elkészített testeket, lehetőség szerint gondoskodjunk róla, hogy ezek elérhetőek legyenek.

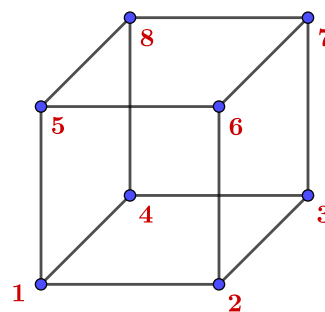
Az óra tartalma

1. Köszöntés, adminisztráció (1 perc)

2. Bolygóbarangoló játék – újra (10 perc)

Rajzoljuk fel a kockát a táblára! A csúcsokat számozzuk meg ugyanúgy, mint előző órán.

- Most megint Hangya Huba útját fogjuk követni, de a következő bolyongás több részből fog állni. Készítsünk egy táblázatot, amelyben rögzíthetjük, melyik esemény hol történt! Én felírom a táblára, és másoljátok ti is a füzetetekbe:



Pihenő	Tücsök Tóbiás	Szöcske Szilvi	Végállomás

- Amikor azt mondom, hogy „Itt tartott pihenőt Huba”, akkor – felnézés nélkül – írtátok le a megfelelő csúcs betűjelét a táblázatba. Ha elvesztettétek Hubát, úgy nézzetek a táblára, mutatni fogom, hogy éppen hol tart, így újra be tudtok kapcsolódni a kalandos kanyargásba.
- Most is otthonról indul (az 1-es csúcsból), és így lép: hátra, fel, jobbra, előre, balra, hátra, le, előre, jobbra, hátra. Ezen a ponton megáll, és tart egy pihenőt.
- Felnézés nélkül írtátok fel, hogy hol van most. Akinek szüksége van rá, ide nézhet, megmutatom.

Hangya Huba pozíciója 3, mutassunk erre a csúcsra.

- A mostani útja során állatokkal is fog találkozni, jegyezzétek meg, hogy melyikkel pontosan hol. Indul tovább: fel, balra, jobbra, le, előre. Itt találkozik Tücsök Tóbiással. Halad tovább: fel, balra. Itt találkozik Szöcske Szilvivel. Folytatja a mendegélést: hátra, le, előre. Az utolsó lépését Tücsök Tóbiás felé teszi meg.
- Írtátok fel, hogy hol van most Huba, illetve azt is, hogy melyik állattal hol találkozott.
- Ha mindenki megvan, ellenőrizzük le.

Olvassuk fel újra a lépéseket, egy diák mutassa a táblán az útvonalat. Tücsök Tóbiással a 2-es csúcsban, Szöcske Szilvivel az 5-ös csúcsban találkozik Huba, a végső pozíciója pedig 2 (visszaérve Tóbiáshoz).

Pihenő	Tücsök Tóbiás	Szöcske Szilvi	Végállomás
3	2	5	2

Mutassátok az ujjaitokkal, hogy hány helyszínt határoztatok meg helyesen a négyből (2 állat, 2 megálló)!

– Most megint párokban fogtok játszani.

- Először mindketten külön-külön helyeztetek el három állatot a bolygón (adjatok neki nevet is)
- Majd írjátok elő egy két körös, 8+10 lépésből álló bolyongást Hubának (a 8. lépés után tartson egy pihenőt). Fontos, hogy rajzoljátok le, illetve írjátok le, hogy a játék után ellenőrizni lehessen.
- Most ti döntitek el, hogy melyik csúcsból indul Huba.
- Készítetek ti is táblázatot, amit a párotok másoljon be a saját füzetébe (természetesen a megoldásokat ne mutassátok meg neki)! Írjátok be a saját állataitokat a táblázatba.

Módszertani megjegyzés

Az irányokra bevezethetünk rövid jelölést, például nyilakat.

Pihenő	Végállomás	1. állat	2. állat	3. állat

- Ha Huba egy csúcsban elsétál egy állat mellett, azt elég az első alkalommal mondani, és innentől – a közös barangolás példája szerint – akár hivatkozhattok a csúcsra az ott ücsörgő állattal is.
- Ha ezzel készen vagytok, akkor döntsétek el, hogy ki melyik szerepben kezd! És mehet is a játék! (...)
- Mutassátok az ujjaitokkal, hogy hány helyszínt határoztatok meg helyesen az ötből (3 állat, 2 megálló)!

Táblázatos áttekintés

Pihenő	Tücsök Tóbiás	Szöcske Szilvi	Végállomás

A bolyongás útvonala (két körben):

hátra	fel	jobbra	előre	balra	hátra	le	előre	jobbra	hátra
Huba itt megpihen. Felnézés nélkül írjátok be a füzetetekbe a pihenő helyét! Ha valaki elvesztette a fonalat, emelje fel a fejét, és megmutatom, hol van most Huba! (a 3-as csúcsban)									

fel	balra	jobbra	le	előre	fel	balra	hátra	le	előre	Tücsök T. irányába
				Tücsök T.		Szöcske Sz.				
Tücsök Tóbiás: 2-es csúcs, Szöcske Szilvi: 5-ös csúcs, végállomás: 2-es csúcs Mutassátok meg az ujjaitokkal, a 4 oszlopból hányat sikerült helyesen kitölteni!										

Üres táblázat a páros munkához:

Pihenő	Végállomás	1. állat	2. állat	3. állat

További játékvariációk, ötletek a következő órákra:

- $1 \times 1 \times 2$ -es, $1 \times 2 \times 2$ -es, $2 \times 2 \times 2$ -es bolygón (és a belsejében) mozog Hangya Huba;
- Körbe megyünk (egy kör a teljes csoportban, vagy több kör kiscsoportokban), mindig a soron következő tanuló mond egy irányt;
- Lehet kísérletezni azzal, hogy milyen gyorsan elmondott utasítássorozat esetén tudjuk még követni Huba rohanását;
- Használhatjuk a lapátlót (de legyen egyértelmű, például plusz információval), illetve a testátlót (például a „tőle legtávolabbi pontba”) is;
- Rákérdezhetünk különböző csúcsok egymáshoz viszonyított távolságára, például „a bolyongás során elhaladt Huba egy ugató kutyus és egy éneklő feketeregő mellett, most melyik hangot hallja messzebből?”;
- Huba sétálhat a lapokon is, például „Huba most a legrövidebb úton hazamegy a bolygó felszínén, azaz nem feltétlenül éleket használva, hány lapon halad át?”

3. „Melyik út megyen itt Budára?” – Keressünk minél rövidebb utat! (6 perc)

Vetítsük ki a prezentáció első diáját, és vezessük fel a feladatot pár mondattal:

- Kalandjaink most egy piramis alakú bolygóra vezetnek minket, a neve Gúlia. Ez a bolygó már lényegesen nagyobb, minden éle 6 km, és nem csak hangyák masíroznak a csúcsaik között, hanem emberek élnek rajta. Az *E* csúcsban található a bolygó fővárosa, a négyzet alakú lap középpontjában (F) pedig Toldi Miklós.
- Toldinak időről időre meg kell mutatnia a fővárosba (E) vezető utat.
- Szerintetek mennyi a legrövidebb út hossza, ami Tolditól a fővárosba vezet a bolygó felszínén? Vegyék kezükbe a padtársatokkal a piramisotokat, rajzoljátok be a szerintetek legrövidebb útvonal hosszát, majd mérjétek le! Ha megvagytok, próbáljátok kiszámolni az útvonal pontos hosszúságát is!

Módszertani megjegyzések

A feladat pontos szövege a második dián található, a tanár ennek kivetítésével zárja a felvezetést.

A diákok a következő három-négy-öt percben ezzel a kérdéssel foglalkoznak. A gondolkodásban segítségükre van a korábban elkészített piramis, melynek élhossza 6 cm, így könnyen ki tudják mérni a feladathoz szükséges hosszakat.

Ellenőrizzük, hogy elakadtak-e, kell-e segítség, vezessük rá őket, hogy használják a Pitagorasz-tételt a számoláshoz.

Tapasztalatunk szerint a diákok igen nagy része (legalább a fele) azt gondolja legrövidebb útvonalnak, hogy a helytartó elmegy valamelyik csúcsig, majd onnan fölfelé indul. Fontos, hogy a körbejárás során NE ingassuk meg őket az elképzelésükben. Így tudjuk a megbeszélés folyamán ezt az útvonaltervet összehasonlítani a helyes megoldással.

4. Tapasztalatok megbeszélése (6 perc)

Módszertani megjegyzések

A közös megbeszélés elkezdéséig rajzoljunk fel a táblára egy gúlát (akár kettőt is), hogy a diákok aztán abba szabadon rajzolhassanak. Igen hasznos, ha egy nagyméretű gúla is a tanár rendelkezésére áll, amelyben szintén meg tudják a diákok mutatni az útvonalakat, nem csak a táblán lerajzolni.

- Kezdjük el megbeszélni, ki mire jutott a feladat megoldásával! Ki az, aki talált 11 km-nél rövidebbet? *(Erre remélhetőleg mindenki felteszi a kezét.)*
- Berajzolná valaki azt az útvonalat, amire ő gondolt?

Módszertani megjegyzések

Itt érdemes egy olyan diákot kihívni, aki az előbb említett nem optimális megoldást (négyzetcsúcsig, majd él mentén a királyhoz) rajzolja fel. Ha senki nem erre tippelt, akkor később térjünk vissza rá, mint olyan megfontolandó lehetőség, ami elképzelhető, hogy rövidebb az alább Útonal_2 néven futó útvonalnál.

- Milyen hosszúságúnak mértétek ezt az utat? (10 és 10,5 km közti válaszra számítunk.)
- És ki tudjátok számolni a pontos hosszát is? Ha nem, az sem baj, segíték!
- Kérem a csoportot, hogy mindenkinek kerüljön be a füzetébe, amit most írni fogunk, mert a későbbiek szempontjából fontos lesz. Az is írja, akinek van ötlete rövidebb útvonalra! Címnek felírhatod, hogy *Útvonalak, hosszúságok*. Rajzold fel te is a gúlát, amit a táblán látsz, és írd fel alcímnek, hogy *Útvonal₁*.

A tanár a diákokkal közösen leírja a megoldást az alábbiak szerint.

Útvonal₁:

Mivel ABCD négyzet, így az $ABC\angle$ derékszög, tehát használható a Pitagorasz-tétel az ABC háromszögben:

$$AC^2 = 6^2 + 6^2$$

$$AC = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2} \approx 8,485$$

Az előző gondolatmenethez rajzoljuk külön ki az ABCD négyzetet.

A TC szakasz hossza fele AC hosszának, ezért TC hossza $3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,243$ km.

Mivel a CE él hossza 6 km, így az $TC + CE$ útvonal hossza

$$6 + 3 \cdot \sqrt{2} \approx 10,243 \text{ km}$$

A számítás lejegyzése után rátérünk az ennél rövidebb útvonal megbeszélésére:

- Van olyan diák, aki ennél rövidebb útvonalat is talált? Jöjjön ki, mutassa meg!
- Milyen hosszúságot mértetek erre a hosszra? Mennyi az útvonalatok hosszának pontos értéke?
- Írjuk le közösen ezt a számolást is, most Útvonal₂ felirattal!

Útvonal₂:

- Jelölje F a CD szakasz felezőpontját. Ekkor – mivel az $EFC\angle$ derékszög – az EFC háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt.

Rajzoljuk ki a táblára az FEC háromszöget, jelöli benne a derékszöveget, és a hosszakat. Ügyeljünk rá, hogy a diákok is készítsék el az ábrát a füzetükben.

- Rögzítsük a következő számításokat:

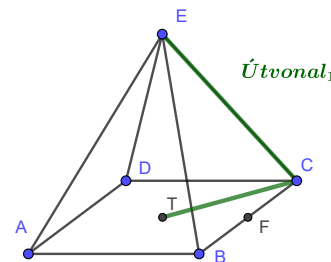
$$CE^2 = CF^2 + FE^2$$

$$6^2 = 3^2 + FE^2$$

$$FE^2 = 36 - 9 = 27$$

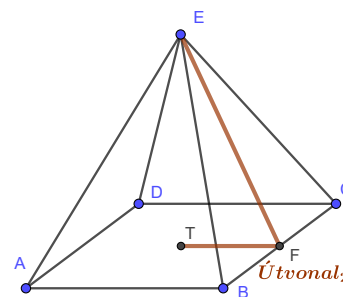
$$FE = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,196$$

- Mivel FT hossza 3 km, így az $FT + FE$ út hossza $3 + 3 \cdot \sqrt{3} \approx 8,196$ km.



Módszertani megjegyzés

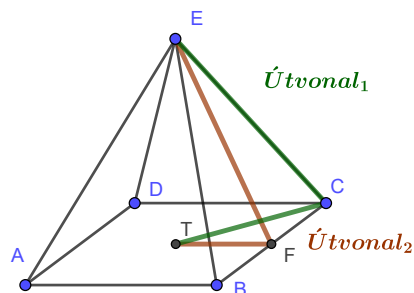
Ha már szerepelt, hogy a négyzet átlója az oldalának a $\sqrt{2}$ -szerese, akkor érdemes erre visszautalni, mint egyszerűbb kiszámítási lehetőség.



- A két eredményt összehasonlítva látszik, hogy a második útvonal több, mint két kilométerrel rövidebb.

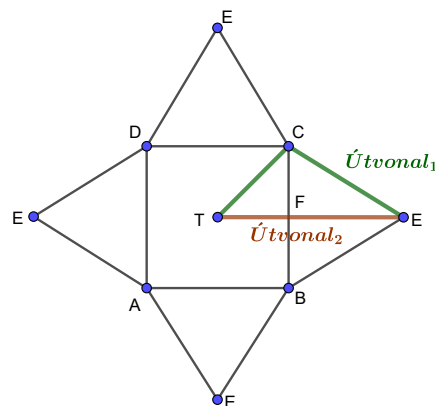
A megoldásokat rögzítsük a táblán, és ellenőrizzük, hogy a diákok leírták-e. Ha a csoport elkészült a lejegyzéssel, a következő diszkusszióba kezdünk bele.

- Azért még maradtak nyitott kérdések: Találhatunk ennél is rövidebb útvonalat? Illetve hogyan tudnánk szemléltetni számolás nélkül azt, hogy az Útvonal₂ biztosan hosszabb az Útvonal₁-nél? Van valakinek ezekre ötlete?
- Ha síkban keresnénk a legrövidebb útvonalat, akkor hogyan találnánk meg azt? Nem lehet valahogy ezt a problémát síkbeli feladatra visszavezetni? Hiszen a gúlánkat is egyetlen síkbeli papírlapból hajtogatjuk.



Ezen a ponton felvázoljuk a gúla testhátóját (egy-egy négyzetoldalra illeszkedő háromszögekkel), és megkérjük valamelyik diákot, hogy rajzolja be a két vizsgált útvonalat a gúla kihajtogatott hálójának rajzába.

- Látjátok, itt jól látszik már, hogy miért hosszabb lényegesen az Útvonal₁, mint az Útvonal₂. És azt is érdemes észrevenni, hogy az Útvonal₂ igazából pont arra épül, hogy két pont között a legrövidebb út az egyenes, így Útvonal₂ tényleg a legrövidebb út.
- Még annyit hadd kérdezzek, hogy hány legrövidebb útvonal fut a helytartó lakhelye és a királyi palota között?



Befejezésképp kérjünk meg egy diákot, mutassa meg a nagy négyzet alapú gúlán a négy különböző egyforma hosszúságú utat.

5. Keressük a legrövidebb utat! – folytatás (5 perc)

- Toldi néha nem a főváros felé vezető utat mutatja meg, hanem egyenesen a főváros felé mutat (nézzük el neki, hiszen ez sokkal kevésbé megerőltető). A következő 3-4 percben próbáljátok meg meghatározni, hogy légvonalban milyen messze van egymástól Toldi és Buda.

Módszertani megjegyzések

A diákok a következő négy percben ezzel a kérdéssel foglalkoznak. Ellenőrizzük, hogy elakadtak-e, kell-e segítség, vezessük rá őket a Pitagorasz-tétel újbóli használatára.

Ha valamelyik páros gyorsan elkészült, érdemes megkérni, hogy megoldását írja fel a táblára, hogy a megbeszéléskor már csak át kelljen nézni közösen a számolást.

A felírt megoldások folyamán mindig külön rajzoltassuk ki a síkmetszeteket, lapokat, amelyekben a számolás zajlik!

1. megoldás:

Mivel T a piramis magasságának talppontja, így $ETF\Delta$ derékszögű, ezért használható benne a Pitagorasz-tétel.

$$ET^2 + TF^2 = EF^2$$

$$ET^2 + 9 = \sqrt{27}^2$$

$$ET = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,23 \text{ km}$$

2. megoldás:

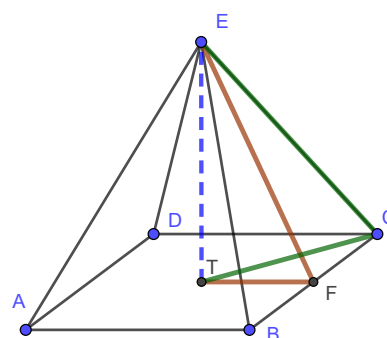
Mivel T a piramis magasságtalppontja, így $ETC\angle$ derékszög, ezért az $ETC\Delta$ -ben alkalmazható a Pitagorasz-tétel.

$$ET^2 + TC^2 = EC^2$$

$$ET^2 + \sqrt{18}^2 = 6^2$$

$$ET^2 = 36 - 18 = 18$$

$$ET = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4,23 \text{ km}$$



6. Tapasztalatok megbeszélése (5 perc)

Az eddigi három útvonal áttekintését érdemes egyben is elvégezni, és összegezni a tapasztalatokat.

Módszertani megjegyzések

Ha az időkeret megengedni, végezzük el egyben is az eddigi három útvonal áttekintését, és összegezzük a tapasztalatokat. A csoport érdeklődésének függvényében az alábbi fontos gondolatokra érdemes kitérni:

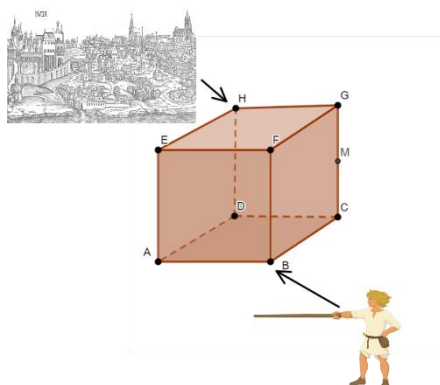
- Vegyük észre, hogy összességében milyen sokat rövidült az útvonal a legelőször vizsgált Útvonal_1-hez képest.
- Az első feladat megoldásánál nagyon sokat segített, hogy a térbeli feladatot síkbeli feladatra vezettük vissza.
- A számolásokban Pitagorasz tételét használtuk. Mivel a derékszögek térbeli rajz esetén torzulnak, érdemes kirajzolnunk torzulásmentesen azokat a háromszögeket, amikben számolni akarunk, ez csökkenti a hibázás esélyét.
- Az utolsó feladatban előkerült egy egyenes szakasz az alaplap középpontja és a felső csúcs között. Vajon mi lehet a neve ennek a szakasznak? (A diákok remélhetőleg kitalálják, hogy ez a szakasz a gúla magassága)
- A számolások folyamán többféle magassággal dolgoztunk. Az FE szakasz magasság volt a BCE háromszögben, a TE szakaszt viszont a teljes gúlában. Fontos, hogy ezeket a magasságokat ne keverjük egymással. Érdemes ezt jelölésben is elkülöníteni, pl. a teljes test magasságát m -mel, az oldallap magasságát következetesen m_o -val jelölni.
- A testen belül vezető legrövidebb útvonal hossza az előző feladatunk mindkét útvonallehetőségéből kijött, kétféle módon is ki tudtuk számolni a test magasságát.

7. Feladatmegoldás, az óra lezárása (10 perc)

Tanári közlés: Az előbb jó alaposan körbejártuk, hogy hogyan érdemes legrövidebb útvonalakat találni egy gúla alakú bolygón. A feladatokat most az lesz, hogy padtársatokkal megvizsgáljátok, hogy hogyan működik mindez egy kocka alakú bolygón. Óra végéig dolgozzatok közösen a megoldáson, ha nem értek a végére, akkor a befejezés lesz a házi feladat!

Módszertani megjegyzés

A feladat megbeszélésére a következő óra elején kerül sor (a megoldást is a 6. óra vázlatában közöljük). A diákoknak a feladat befejezését tűzzük ki házi feladatul.



Vetítsük ki a prezentáció utolsó diájáról az alábbi feladatot:

Feladat: Egy kocka alakú bolygó neve Hexaédria, élei 2 km-esek. Toldi és Buda két átellenes csúcson helyezkedik el. Milyen hosszú a köztük futó legrövidebb út, mely

- a bolygó belsejében vezet?
- a bolygó külsején vezet?
- Hányféle módon juthatunk a bolygó külsején haladva Tolditól Budára, ha a lehető legrövidebb úton haladunk?

Módszertani megjegyzés

A feladat megbeszélésére a következő óra elején kerül sor (a megoldást is a 6. óra vázlatában közöljük). A diákoknak a feladat befejezését tűzzük ki házi feladatul.

8. Az óra lezárása (1 perc)

Tanár: Kérlek fejezzétek be ezt a feladatot otthon, a megoldás megbeszélésére a következő óra elején kerül sor.

Mellékletek

Prezentáció a bolygókon való legrövidebb utak kereséséhez

Az órán feldolgozott feladatokhoz tartozó diavetítés.

Fájlnév: [térgeometria9_05_melléklet_útvonalak_bolygókon](#)

Nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [térgeometria9_05_táblázatos_óravázlat](#)