

II. óra: Kockák, gúlák, alapfeladatok

Az óra célja: Kocka, gúla megismerése, hozzájuk kapcsolódó feladatok megoldása, térszemlélet fejlesztése különböző testek lerajzolása által.

Előzetes tudás: nem igényel előzetes tudást

Központi fogalmak: kockák, gúlák, alapfeladatok

Motiváció és koncepció

Az előző, szabadabb és gyerekek kreativitására építő óra után elkezdünk a szerzett tapasztalatok mögé geometriát építeni, mégpedig a kocka és a gúla vizsgálatával.

Az óra fontos eleme, hogy a diákok elkészítenek egy kockát és egy gúlát. A továbbiakban majd nagyon nagy segítséget jelent, ha ezeket a testeket egy-egy feladatnál kézbe tudják venni, rajzolni tudnak rá stb.

„Jó ábra, fél megoldás.” – hangzik a tanári bölcsesség. Szép, a gondolatmenetünket segítő ábra készítése nem minden feladatnál egyszerű, és semmiképpen sem magától értetődő készsége a diákoknak. Ezen az órán ennek a fejlesztésében igyekszünk támogatni a diákokat.

Természetesen később már nem az lesz a cél, hogy szép, hanem hogy használható, a megoldás folyamatát előre vivő ábrák szülessenek, de most – amikor még csak tanuljuk, hogy mi hogyan néz ki lerajzolva – fontos, hogy minél jobban törekedjünk a valóság ábrázolására.

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Bevezetés Köszöntés, előző óra tapasztalatainak felidézése	kérdve kifejtő		2 perc
2.	Testmodellek készítése párban	pármunka	nyomtatott testhálók, üres lapok, ragasztók	12 perc
3.	Testhálók közös vizsgálata	frontális, irányított beszélgetés	kivetítő	10 perc
4.	Közös rajzolás, feladatmegoldás	frontális, irányított beszélgetés, pármunka	tábla	20 perc
5.	Az óra lezárása, házi feladat	frontális		1 perc

Az óra előkészítése

1. **Testhálók nyomtatása** (fejenként egy, a dokumentumban 4 féle van)
Fájlnév: [térgeometria9_02_melléklet_kockahálók kivágásra](#)
2. **Ragasztó, olló és üres lap biztosítása a hajtogatáshoz**
3. **Kivetítő előkészítése** a kocka tizenegy testhálójának kivetítéséhez
Link: <https://www.geogebra.org/m/fooXD2SG>

Az óra tartalma

1. Köszöntés, a téma felvezetése, csoportalakítás (2 perc)

Tanár: Az előző órán egy új témával kezdtünk ismerkedni. Fel tudnátok idézni, hogy mi volt a legfőbb feladatokat az elmúlt órán? És arra is emlékeztek, hogy milyen nyitott kérdések maradtak a feladat megbeszélése közben?

Módszertani megjegyzések

Hasznos, ha a megbeszélés során minél több ember kap szót, ezt rövid kérdésekkel ösztönözhetjük. Érdekes lehet megkérdeznünk, hogy milyen geometriai testekből épülnek fel az előző órán készített makettek. Ezáltal kaphatunk képet arról, hogy a diákok mennyire ismerik pl. a hasáb, gúla fogalmát, mely elnevezéseket múlt órán még nem igazán használtunk.

2. Testmodellek készítése párban (12 perc)

Tanári közlés: Mint megbeszéltük, egy-egy bonyolultabb tetőszerkezet több részből, alapformából tevődik össze, gondoljatok csak a múlt órán látott Szépművészeti Múzeum tetőjére. A térgeometria minél jobb megértéséhez nagyon fontos, hogy a legalapvetőbb testek világában magabiztosan mozogjunk. Ezt segíti, ha kézbe is tudjuk venni ezeket az alapvető testeket.

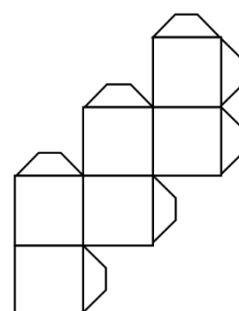
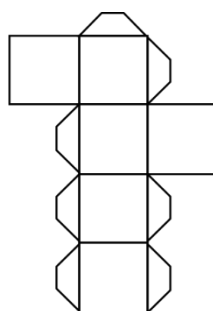
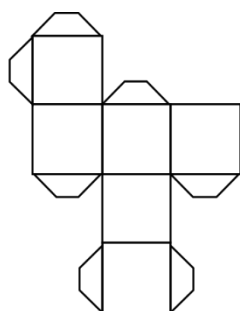
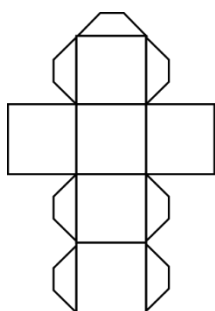
A következő kb. 10 percben két test modelljét kell párban elkészítenetek, az egyik a kocka, a másik a négyzet alapú „piramis”, azaz a gúla. (Érdekes a táblára felrajzolni egy gúlát – a félreértések elkerülése végett.) A kockának a hálóját megkapjátok kinyomtatva, ezt kell kivágnotok majd összeragasztanotok. A gúlának viszont már a hálóját is magatoknak kell elkészíteni, minden éle 6 cm hosszú legyen. Jó munkát!

Módszertani megjegyzések

Az instrukciók elhangzása után osszuk ki a kinyomtatott testhálókat! Az egyes párosok nem mind egyformát kapnak, ennek a későbbiekben jelentősége lesz.

A gúla elkészítéséhez biztosít üres papírt és ragasztót. A későbbiek szempontjából fontos, hogy a gúla élhosszai tényleg 6 cm-esek legyenek.

Mindenkihez az alábbi négy kockaháló valamelyike kerül:



3. Testhálók közös vizsgálata (10 perc)

1. A tanár megkér egy párost, hogy rajzolja fel a táblára, milyen kinézetű hálóból kapták a kockájukat (a fülek rajzolásától tekintsünk el). Természetesen a diákok rögzítsék a füzetükbe a táblára felkerülteket.
2. **Tanári kérdés:** Mindenki ilyen hálóból dolgozott? Van, aki másmilyen hálót kapott kézhez? (Ebből a diákok számára kiderül, hogy különböző ábrákból indultak ki.)
3. A diákok felrajzolják az órán használt testhálókat a táblára.
4. **Az eddigiek kiegészítése:** a diákok feladata, hogy rajzoljanak fel olyan kockahálót a táblára, amilyen még nem került fel.
5. Végül a tanár felrajzolja a hiányzókat, vagy bemutat egy [online változatot](#).
6. Ezután a gúlák hálóját rajzolják fel a diákok a táblára, ebből is minél többet próbálunk közösen összegyűjteni.
7. Tudatosítjuk, hogy
 - a. különböző hálóból akár egyező testeket is kaphatunk;
 - b. ha térbeli kérdésekre akarunk válaszolni, és ezeket a kérdéseket vissza szeretnénk vezetni a síkba, akkor a testháló elkészítése hasznos lehet.

Módszertani megjegyzés

A közös megbeszélést a tanár irányítja, de fontos, hogy a diákok tapasztalatait hozza felszínre, fogalmazza meg szakszerűen és összegezze mindenki számára.

A megbeszélés menetét nagyjából így képzeljük, de dönthet úgy is a tanár, hogy szisztematikusan nézik végig az összes lehetőséget.

Módszertani megjegyzések

A testhálók felrajzolása közben érdemes beszúrni egy rövid frontális gyakorlást, például ilyen kérdéseket beillesztve a megbeszélésbe:

- Rámutatok egy testhálón egy négyzetre. Mutassátok meg, melyik a vele szemközti négyzet!
- Letörlök egy négyzetet a kocka hálójából. Fel tudod máshová is rajzolni úgy, hogy újra kockahálót kapjunk?

4. Közös rajzolás (20 perc)

Módszertani megjegyzések

Nagyon fontosnak tartjuk, hogy a diákoknak ne okozzon gondot az egyszerűbb térbeli testek lerajzolása. Tapasztalatunk szerint ezt gyakorolni kell, a következőkben viszonylag didaktikusan igyekszünk megtanítani az ábrázolás alapszereit.

Az alábbiakban axonometrikus ábrázolást fogunk tanítani, nem foglalkozunk perspektívával. Tapasztalatunk szerint ez a módszer a feladatok szempontjából elegendő és célravezető. Természetesen, aki jobban elmélyedne a különböző ábrázolási módokban, azt mi is csak bátorítani tudjuk erre.

Nézetek vizsgálata (~ 6 perc)

Tanár: Közös tulajdonsága volt a testhálónak, hogy hat kis négyzetből álltak. Tudjuk-e úgy tartani a kockát, hogy csak egy négyzetet lássunk belőle? Tartsuk a fény (Nap vagy lámpa) felé, így (kis túlzással) egy sötét négyzetet látunk. Most egy kicsit fordítsátok el, ahogyan jól esik. Most is négyzetet láttok?

Diák: Nem.

Tanár: Akkor mit?

Diák1: Négyyszöget, téglalapot.

Diák2: Hatszöget.

Tanár: Attól függően, hogyan tartjuk a kockát, változhat, hogy mit látunk. Ha viszont magunkkal szemben fixáljuk a rajzolandó tárgyat, akkor látjuk az előlnézetét. Emiatt egy tárgy előlnézete természetesen függ attól, hogy hol állunk, hol van hozzánk képest. Mit gondoltok, az előlnézeten kívül még milyen nézete van a kockának?

Diák: Például oldalnézete?

Tanár: Igen! Mi lehet az?

Diák: Az, amit a páruunk oldalról lát a testből. A felülnézet pedig biztos az, amit felülről látunk.

Tanár: Így van! És hátulról nézve mit lát a társunk?

Diák: Amit előlről mi, legalábbis a körvonalában.

Tanár: Most (megint) tartsátok úgy a kockát, hogy az előlnézete egy négyzet legyen. Ekkor mi az oldalnézete és a felülnézete?

Diák: Négyzet.

Rövid feladat:

Helyezzétek le az asztalra valahogyan a nálatok lévő gúlát, és rajzoljátok le ezt a három nézetét! Hogyan célszerű a gúlát elhelyezni?

Tanár: Fogjuk meg a tömör kockánkat! Hogyan tartsuk, hogy a lehető legkevesebb élet lássuk? Ilyenkor hány élet nem látunk?

...

Tanár: És ha a lehető legtöbb élet szeretnénk látni?

...

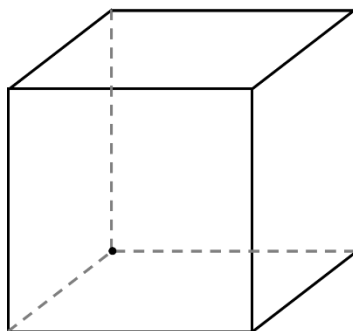
Tanár: Most annyit mozgassunk rajta, hogy az egyik csúcsa éppen szemmagasságban legyen. Addig döntsük magunk felé, amíg a három látszó oldal ugyanolyannak, azaz egybevágónak nem látszik. Rajzoljuk le, amit látunk! Ezek milyen négyszögek?

Diák: Paralelogrammák.

Tanár: Igen, nagyon jó!

Kocka célravezető rajzolása (~ 10 perc)

Tanár: Most elérkeztünk egy fontos ponthoz. Felrajzolok egy kockát a táblára úgy, ahogy érdemes lesz majd mindig nektek is lerajzolni. Fontos, hogy a matekórán általában nem a rajzórán gyakran használt, úgynevezett perspektivikus ábrázolást használjuk, tehát amely egyenesek a térben párhuzamosak, azok annak az ábrázolásakor is párhuzamosak maradnak, amelyet egy irányból látunk.



Tanár: Így néz ki a kocka célravezető lerajzolása. Mindjárt megbeszéljük, hogyan érdemes elkészíteni. Induljatok abból a helyzetből, amikor csak az egyik oldalt látjátok, és nagyon lassú mozgatással jussatok el abba, amit a táblán láttok. Sikerült?

Módszertani megjegyzés

Miközben rajzolnak, körbejárunk. Találhatunk olyan megoldást, amelyben be vannak húzva a négyzet átlói is. Itt érdemes megbeszélni, hogy habár az alulnézet és a felülnézet természetesen ugyanaz, viszont, ha a látszó éleket is berajzoljuk, akkor lehet különbség.

Diák: Igen.

Tanár: El kell, hogy keserítselek titeket, igazából nem. Amikor csak a velünk szemben lévő oldalt látjuk, akkor az valóban négyzetnek látszik. De mihelyt el kezdjük forgatni a kockánkat, hogy megjelenjen a többi oldal is, akkor már nem egy tényleges négyzetet látunk, hanem paralelogrammát, és akkor a rövidüléssel még nem is foglalkoztunk.

Diák: Tehát olyannak rajzoljuk le a kockát, amilyenek igazából nem is látjuk.

Tanár: Igen, azért, mert miközben úgy ábrázoljuk, hogy minél többet (azaz minél több oldalt, csúcsot, élt) lássunk belőle, fontosnak tartjuk a rajzunkon megjeleníteni, hogy négyzet alkotja az oldalait. Tehát úgy rajzoljuk le a kockát, hogy a három alapirányból csak egy dől.

Tanár: Most megtanuljuk lépésről-lépésre, hogyan kell egy kockát célravezető módon lerajzolni! Én elkészítem az ábrát a táblára, ti pedig rajzoljátok velem együtt a füzetetekbe.

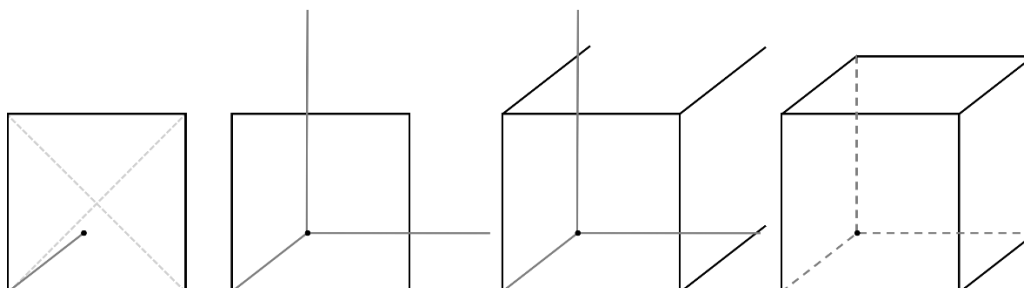
A kocka rajzolásának lépései:

1. Négyzet rajzolása.
2. A négyzetbe eső, hátsó lapon található csúcs kijelölése: egyrészt az előlap alsó oldalához közelebb, mint a többi oldalhoz, másrészt ne az előlap valamely szimmetriatengelyére kerüljön. A csúcs összekötése a hozzá legközelebbi előlapi csúccsal.
3. A kijelölt csúcsba párhuzamos egyenesek rajzolása (a négyzet oldalaival).
4. Az előlap és a hátlap között meglévő éllel párhuzamos egyenesek rajzolása az előlap maradék három csúcsába.
5. A keletkező metszéspontokon keresztül az előlapi négyzet oldalaival párhuzamos egyenesek rajzolása.

Módszertani megjegyzés

Figyeljünk, hogy mindenki számára követhetőek legyenek a lépések. Hagyjunk időt a gyakorlásra, szükség esetén rajzoltassuk le az ábrát többször is.

Ilyen módon a látszó oldalaink: egy négyzet, és két egybevágó paralelogramma.



Tanár: Mielőtt megmutatnám, hogyan juthatunk el ugyanehhez az ábrához más úton, meg kell próbálnotok lerajzolni az előlnézetét a kezemből lévő kockának. De figyeljetek, mert trükkösen fogom tartani! (A kezében forgatja a kockát, mintha a megfelelő szöget keresné, majd hirtelen a háta mögé rejti.) Rajzolhatjátok!

Diák: De így nem tudjuk lerajzolni!

Tanár: Miért nem? Hiszen tudjátok, hogy egy kocka van a kezemből.

Diák: Az előlnézet (és a többi nézet is) függ attól, hogyan helyezkedik el a kocka a térben.

A tanár előveszi a kockát, és egy tetszőleges helyzetben rögzíti.

Tanár: Most már egyértelmű, mi az előlnézete?

Diák: Nem. Mindenki a saját szemszögéből látja, és számára valóban egyértelmű az előlnézet, de mindannyian különböző előlnézetet rajzolnánk le a füzetbe.

Tanár: Így van, igazatok van, ez nem egy egyértelmű feladat volt!

Tanár: Most nézzünk egy másik módszert a kocka lerajzolására! Ezt is rajzoljátok velem együtt a füzetbe.

1. Két pont összekötésével jön létre a szakasz.
2. Két szakasz megfelelő csúcspárjai összekötésével jön létre a négyzet.
3. Két négyzet megfelelő csúcspárjai összekötésével jön létre a kocka.

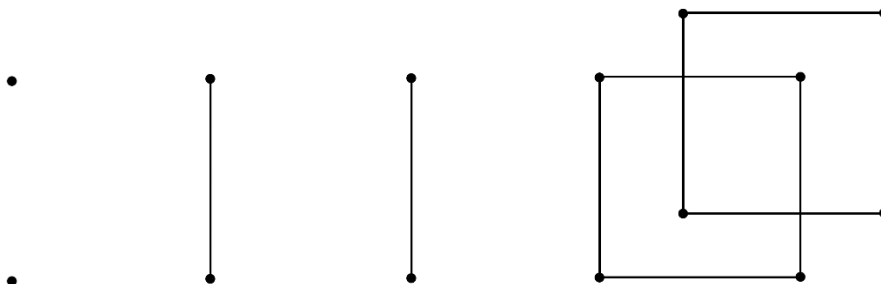
Ezt a 3. lépést nézzük meg részletesebben is!

- 3.1. Négyzet rajzolása, a hátsó lap egy csúcsának kijelölése az előzőekben látott szempontok alapján.
- 3.2. Az új csúcsra illeszkedő négyzet rajzolása.
- 3.3. Megfelelő csúcspárok összekötése egyenessel.

Módszertani megjegyzés

A térszemlélet fejlesztése céljából építkezünk a pontból indulva. A csoporttól függően kitérhetünk arra, hogyan változik lépésről-lépésre a dimenziószám, és két kocka megfelelő csúcspárjai összekötésével felrajzolhatjuk a négydimenziós kockát is.

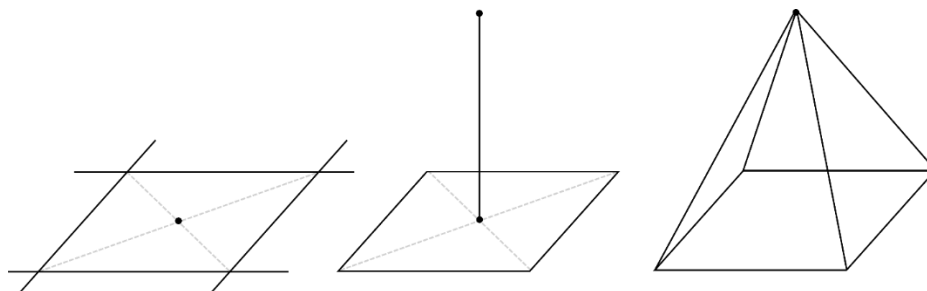
Most is figyeljünk, hogy senki ne maradjon le, mindenki kövesse a lépéseket.



Gúla rajzolása (~ 4 perc)

Tanár: Most vegyük a kezünkbe a gúlánkat, és azt is rajzoljuk le!

1. Párhuzamos egyenespárok segítségével paralelogramma rajzolása.
2. Paralelogramma középpontjának meghatározása az átlók segítségével.
3. Merőleges állítása a paralelogrammára a középpontba.
4. A gúla csúcsának kijelölése.
5. A csúcs összekötése az alaplap csúcsaival.



5. Az óra lezárása, házi feladat (1 perc)

Tanár: Az otthoni gyakorlás során további testeket kell a füzetetekbe lerajzolni. Ezek közül választhattok:

- kockára alaplappjával lefelé elhelyezett gúla;
- csúcsára állított kocka,
- hatszög alapú hasáb;
- háromszög alapú gúla, háromszög alapú hasáb, trapéz alapú hasáb;
- négy kiskockából álló téglatest;
- szabályos hatszög alapú gúla.

Módszertani megjegyzések

Kevesebb választható testet is megadhatunk, illetve kijelölhetünk kötelezően lerajzolendő testeket is.

Határozzuk meg, hány test lerajzolását várjuk el, illetve hogy a további testek rajzolását értékeljük-e valamilyen formában.

Mellékletek

Nyomtatható, kivágható kockahálók

Négyféle testháló, amelyekből a csoportmunka során diákok hajtogatás és ragasztás segítségével készíthetnek kockát.

Fájlnév: [térgeometria9_02_melléklet_kockahálók_kivágásra](#)

Nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [térgeometria9_02_táblázatos_óravázlat](#)