

# V. óra: Grafikonok és függvények

**Előzetes tudás:** Függvény, függvénygrafikon.

**Központi fogalmak:** Grafikonok készítése.

## Az óra legfontosabb elemei

1. Az óra nagy részében ismét egy Desmos-feladatlapon dolgoznak a diákok, ahol videón bemutatott változásokat kell grafikonon rögzíteniük.
2. Ezután egy taxitársaság díjszabását kell alaposabban megvizsgálniuk: különféle értékeket meghatározni grafikon alapján és számolással is. Ez a feladat már a behelyettesítés gondolatát, illetve a lineáris függvény fogalmát készíti elő.

## Miért így tanítanánk mi?

Az ötödik óra grafikonok alkotásáról szól. Az esetleges előző óráról maradt feladatok megbeszélése után újra a Desmos felületet fogjuk használni. Ebben most a diáknak igen sokféle grafikont kell létrehozniuk, hol videó, hol szöveg alapján. Megoldásukról egyből kapnak látványos visszajelzést, így jó eséllyel megint élményszerű lesz a tanulási folyamat a számukra.

A grafikonalkotás után az óra végére elérkezünk oda, hogy megjelenik a grafikonok képlettel leírása, és ennek kapcsán a behelyettesítés gondolata, épp csak előkészítve a következő óra fő célját.

## Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Desmos/Amplify használatának előkészítése.** Minden párnak szüksége lesz egy internet-hozzáféréssel rendelkező okoseszközzel, és lehetőség szerint szükségünk lesz vetítőre/okostáblára is. Amennyiben nem elérhető a diákoknak okoseszköz, úgy kivetítő segítségével közös, frontális munka keretében is meg lehet valósítani az órarészletet. A technikai tudnivalókkal kapcsolatban bővebben lást a *Desmos-kisokost*.

A hosszabb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/66099438108806af12a15c1c>

A rövidebb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/663bf1749e4b677c38b0103f>

Útmutató: #fv1\_00-Desmos-kisokos.pdf

2. **GeoGebra használatának előkészítése:** vetítő, internetkapcsolat/fájl letöltése.  
Link: <https://www.geogebra.org/classic/qrgwbu4d>

## Az óra felépítése

### 1. Órakezdés, adminisztráció (2 perc)

#### Módszertani megjegyzések

Ha szükséges, ezen a ponton visszatérhetünk az előző órai tőzsdés feladatra. Nyugodtan beszéljessünk újra pár mondatot a függvények és hozzárendelések fogalmáról is.

### 2. Grafikonok rajzolása Desmos/Amplify-on (30 perc)

**Tanár:** Ismét a múltkor megismert Desmos-felületen fogtok párokban dolgozni. Mindenki vegye elő a telefonját/laptopját! Legalább páronként egy működő eszközre szükség lesz, de szerencsésebb, ha egyénileg is tudtok dolgozni.

#### Tudnivalók a Desmos/Amplify használatához

A Desmos használatához részletes leírás a **#fv1\_00\_Desmos-kisokos.pdf** fájlban található. A leírás elsőre ijesztő hosszúságúnak tűnhet, de a felület nagyon felhasználóbarát, érdemes egyszer rászánni egy kis időt a kiismerésére, hiszen ha egyszer megértettük, utána már mindig ugyanazt a mechanizmust követhetjük, amikor Desmos-szal dolgoztatjuk diákjainkat az óránkon.

#### A Desmos/Amplify-feladatlap közzététele

Míg a diákcsoportok előkészülnek az eszközeikkel, indítsuk el a feladatlapot, és vetítsük ki a csatlakozási kódot, esetleg osszuk is meg a csatlakozási linket digitális formában a csoporttal, hogy könnyebben lépjenek be.

A hosszabb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/66099438108806af12a15c1c>

A rövidebb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/663bf1749e4b677c38b0103f>

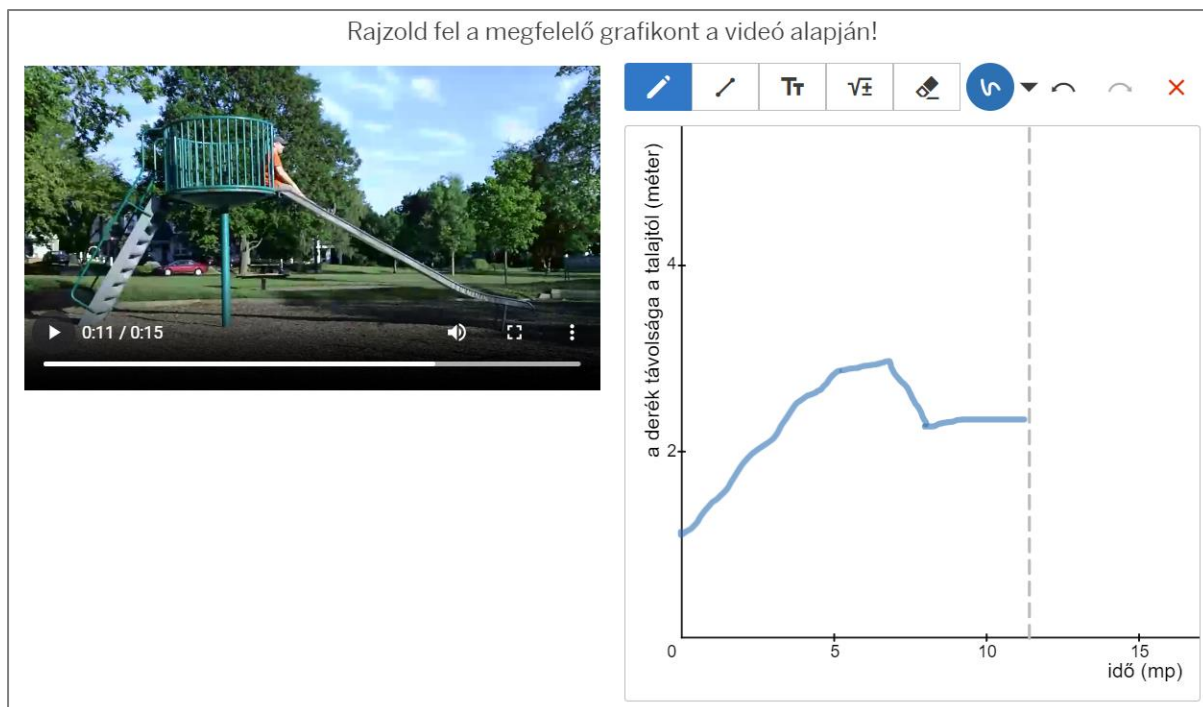
**Tanár:** Indítsátok el a megadott linket, a [student.amplify.com/join](https://student.amplify.com/join) oldalon lépjete be a kivetített kóddal! A legelső, *Continue without signing in* opcióval tudtok bejelentkezés nélkül belépni. Úgy válasszatok magatoknak nevet, hogy felismerhetőek legyetek!

...

**Tanár:** Mindenkinek sikerült belépni? Kell még várni valakire?

...

A feladatlap kitöltése során ehhez hasonló grafikonokat kell a diákoknak szabad kézzel megrajzolniuk:



### Módszertani megjegyzés

Miközben a diákok dolgoznak, járjunk körbe, segítsünk, ha elakadnának. Az egyes lapoknál a Teacher Moves fül alatt sok hasznos tippet találhatunk arról, hogyan tudunk kérdéseinkkel segíteni az adott feladatrésznél.

Figyelhetjük az egyes párok előrehaladását is. Érdekes időnként megállítani a munkát, és átbeszélni a feladatokra adott válaszokat. A feladatleírásban ehhez is sok praktikus ötletre olvashatunk.

...

**Tanár:** Most egy kicsit megállítom a közös munkát, beszéljük meg közösen a ... kérdésre a választ!

...

### 3. A taxis feladat részletesebb értelmezése (12 perc)

A Desmos-on végzett munka keretében a diákoknak a következő feladatot is meg kellett oldaniuk:

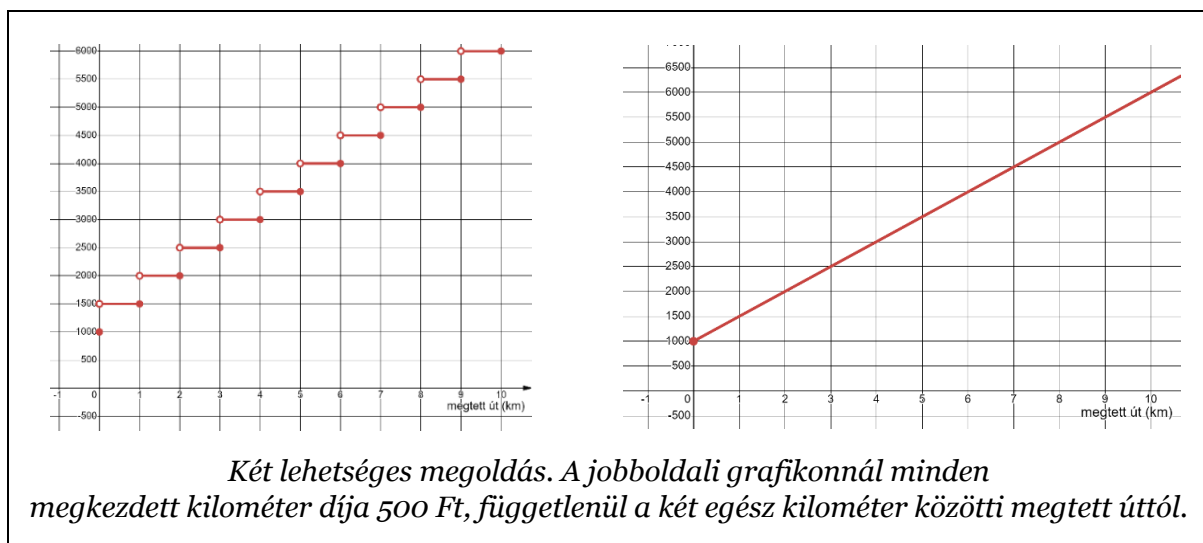


Az óra hátralévő részében ezzel foglalkozunk részletesebben, előkészítve ezzel a függvények képlettel való megadásának, illetve a képletbe történő behelyettesítésnek a rutinját.

Vetítsünk ki néhányat a diákok megoldásai közül! Ezt az Amplify tanári felületének Snapshots fülére kattintva tehetjük meg.

**Tanár:** Nézzük meg milyen grafikonokat rajzoltatok a taxis feladathoz! Mi az, amit nagyon jól eltalált ennek a grafikonnak a rajzolója? És melyik az a részlet, amin még tudnátok javítani?

Többféle értelmezése is lehetséges a feladatnak, érdemes átbeszélni a különbségeket hasonlóságokat az egyes megoldásoknál.



Példa az egyik grafikonról beszélgetésre:

**Tanár:** Mit jelent az, hogy ez a grafikon egy egyenes vonalból áll?

**Diák:** Hogy a megtett úttal egyenletesen nő a viteldíj.

**Tanár:** Mit jelent a kezdőpontja, a (0;1000)?

**Diák:** Hogy az alapdíj 1000 Ft, ezt akkor is ki kell fizetni, ha 0 km-t ment a taxi.

**Tanár:** Mennyi lesz a viteldíj, ha 6 km-t autózunk a taxival? Honnan látszik ez?

**Diák:** 4000 Ft, a grafikonról leolvasható, hogy a függvény a 6-hoz 4000-et rendeli.

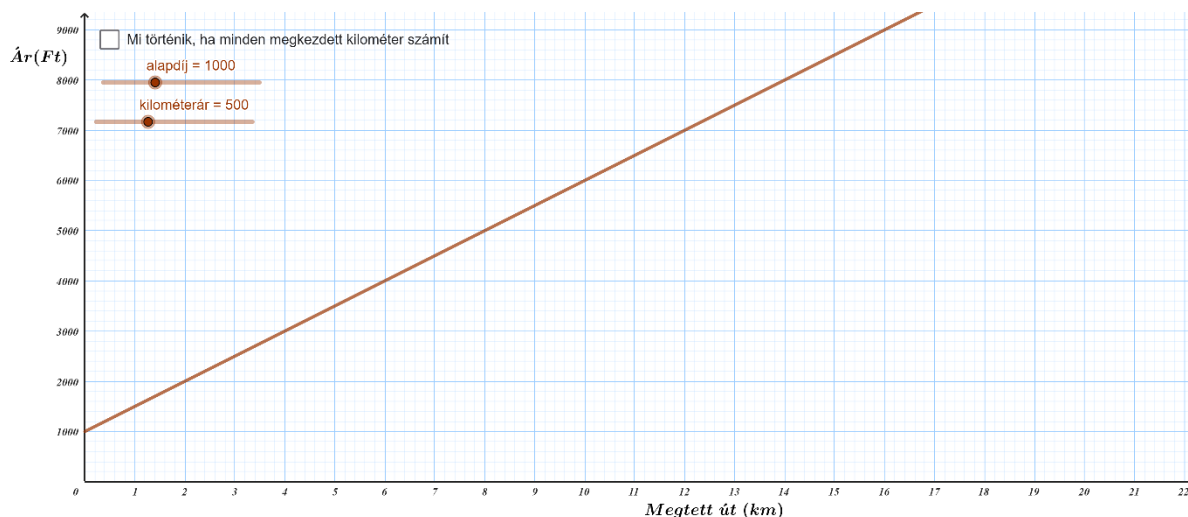
**Tanár:** Hány km-es út után fizetnénk 6000 Ft-ot? Honnan látszik ez?

**Diák:** 9 km-es út után, mert a függvény 9-hez a 6000-et rendeli.

Vetítsük ki a taxis feladathoz készül GeoGebra animációt!

Link: <https://www.geogebra.org/classic/qrqwbu4d>.

A következő irányított kérdéseken végigmenve vonja be a diákokat a képlet felfedezésébe:



**Tanár:** Ezen a grafikonon ugyanaz az összefüggés látható, mint amit az előbb vizsgáltunk, hogy hogyan függ a viteldíj a megtett úttól a szóban forgó taxitársaságnál.

**További kérdések:**

- Milyen hozzárendelést szemléltet az ábra? Mihez rendel mit?
- Mi az alaphalmaz?
- És a képhalmaz?

**Módszertani megjegyzések**

Érdeklődőbb csoportokban felvetődhet, hogy **képhalmazt többféleképp is ki lehet jelölni**, például a valós számok és a nemnegatív számok jó megoldás lehetnek (csak a valós számok esetén a képhalmaz sok eleméhez, méghozzá a negatív számokhoz nem tartozik alaphalmazbeli elem).

Felírhatjuk az alap- és képhalmaz **szokásos jelölését** is:

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \text{ vagy } f : [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

Érdemes lehet arra is kitérni pár szó erejéig, hogy **miért lehet összekötni az ábrázolt pontokat**, miért folytonos vonal a grafikon. Ezt mindenki érzi, hogy igaz, ugyanakkor matematikailag egyáltalán nem egyszerű kérdés, nem rossz, ha ebből legalább annyit érezhetnek a diákok, hogy ez egy nem alapértelmezés, hanem egy jogosan feltehető kérdés.

**További kérdések:**

- Hogyan olvashatjuk le az ábráról, 8 km taxizás körülbelül mennyibe kerül?
- Hogyan tudjuk számolással meghatározni, hogy mennyibe kerül pontosan?
- Ha a 8 km helyett 9,4 km-t taxiztunk, hogy változik a számolás?

**Tanár:** Írjuk fel ezt a matematikaórán általában használt jelölésekkel is! Ha  $f$ -fel jelöljük a vizsgált függvényt, akkor  $f(8) = 5000$  és  $f(9,4) = 5700$ .

**Tanár:** Nézzük most a másik irányt!

- Hány km taxizás került 6000 Ft-ba? És 7000 Ft-ba?
- Hogy látszik ez a grafikonról?
- Írjuk fel ezt is a szokásos jelöléssel!

$$\rightarrow f(10) = 6000 \text{ és } f(12) = 7000$$

**Tanár:** Hány forintba kerül a taxizás, ha a megtett út  $x$  km?

$$\rightarrow f(x) = 1000 + 500x \text{ vagy } \text{ár}(x) = 1000 + 500x$$

Számoljunk ki néhány további útiköltséget, ezúttal már a képletet használva!

**Tanár:** Az ábra mellett láttok most láhattok két állítható csúszkát. Vajon mit tudok állítani ezeknek a segítségével?

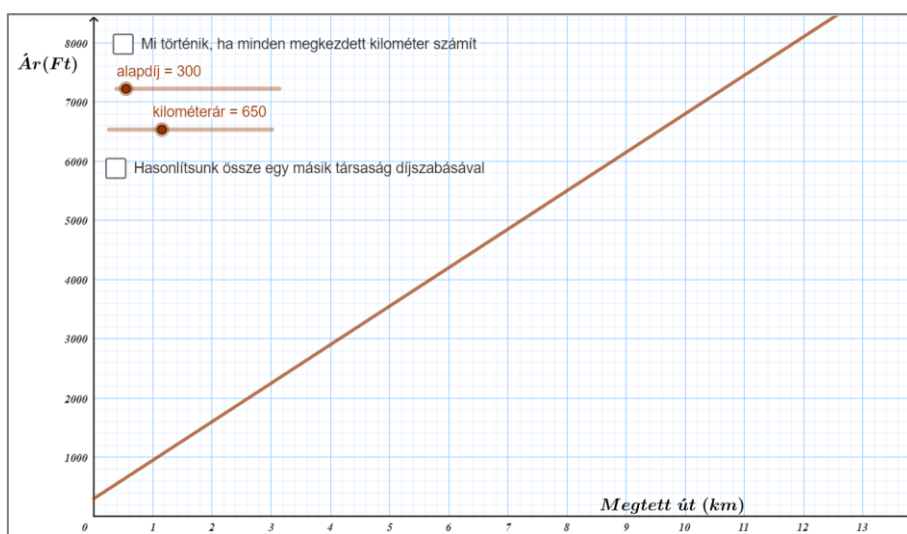
**Diák1:** Az alapdíjat és a kilométerenkénti árat.

**Tanár:** Mi fog történni a grafikonnal, ha az alapdíjat 300 forintra csökkentem? Mi fog történni a grafikonnal, ha a kilométerenkénti díjat 650 Ft-ra növelem?

**Diák2:** 300 Ft esetén lejjebből indul majd, a kilométerenkénti díj változtatásával meg a dőlése fog megváltozni, meredekebb lesz.

**Tanár:** Az előző változtatások hogyan módosítják a képletet? Mi az új díjszabást leíró képlet?

**Diák3:**  $g(x) = 300 + 650x$



Ha szeretnénk még további kérdésekre használni a GeoGebrát, fakultatívan folytathatjuk ilyen kérdésekkel is:

**Tanár:** A kivetítésen láhattok egy olyan feliratot is, hogy „Mi történik, ha minden megkezdett kilométer számít?” Ez vajon mit jelenthet? Mennyi az utazás költsége ebben az esetben 2,8 km és 9,4 km taxizás esetén?

**Diák1:** Ekkor például a 2,8 km-es útért 3 km-nyi kilométerdíjat kell fizetnünk (és mindegy, hogy 2 és 3 km között mennyit autóztunk).

Így számolhatjuk ezt ki:  $f^*(2,8) = 1000 + 3 \cdot 500 = 2500$

(Ekkor a függvény képletét így írhatjuk le:  $f^*(x) = 1000 + \lceil x \rceil \cdot 500$ , ahol  $\lceil x \rceil$  az  $x$  szám felső egészrészze, azaz számnál nem kisebb egészek közül a legkisebb.)

#### Módszertani megjegyzések

A hozzárendelési szabály variálásával és különböző kilométerszám megadásával a behelyettesítést addig gyakoroljuk, míg a csoport többségének világos nem lesz, hogy hogyan kell egy ilyet végrehajtani.

## 4. Óra lezárása (1 perc)

**Tanár:** Ezen az órán zömmel függvények grafikonjaival foglalkoztunk, a következő órákon ezt a tudásunkat fogjuk még jobban elmélyíteni!

**Lehetséges házi feladat:** A feladat kapcsán érdemes kiadni a diákoknak otthoni munkára, hogy nézzenek utána, lakhelyükön vagy a közeli nagyobb városban milyen tarifákkal dolgozik a helyi taxitársaság.

## Mellékletek

### Desmos-feladatlap, grafikonok rajzolása videó alapján

Az egyes feladatokhoz tartozó ötleteket, módszertani megjegyzéseket a Teacher Moves fül alatt lehet elolvasni.

A hosszabb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/66099438108806af12a15c1c>

A rövidebb feladatlap tanári linkje:

<https://classroom.amplify.com/activity/663bf1749e4b677c38b0103f>

Desmos-kisokos a technikai tudnivalókról: # *fv1\_00\_Desmos-kisokos.pdf*

### Geogebra animáció, a taxistársaság díjszabása

Interaktív animáció, ahol taxi alapidője és kilométerenkénti költsége csúszkával állítható.

Link: <https://www.geogebra.org/classic/qrgwbu4d>.

### Részletes nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: # *fv1\_05\_táblázatos óravázlat\_részletes*

### Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Fájlnév: # *fv1\_05\_táblázatos óravázlat\_A4*