

VI. óra: Függvények ábrázolása behelyettesítéssel

Előzetes tudás: Függvény, grafikonnal ábrázolt függvény értelmezése.

Központi fogalmak: Függvénygrafikon, behelyettesítés.

Az óra legfontosabb elemei

1. Az óra elején még tovább elemezzük a taxis példát, egy újabb animáció segítségével, amelyben már két különböző társaság díjszabásának összehasonlítására is van lehetőség.
2. Ezután egy feladatsor megoldásával folytatódik az óra.

Miért így tanítanánk mi?

Az előző óra folyamán a diákok elkezdtek elmélyülni a hozzárendelések és a hozzájuk tartozó grafikonok közti kapcsolatban. Mindezt viszont képletek nélkül tették, abból a megfontolásból, hogy így kevésbé vonja el a behelyettesítés technikája a figyelmet a szemléletről. Miután a szemlélet erősítésén az elmúlt órákon sokat dolgoztunk, rátérünk a behelyettesítéses grafikonkészítésre. A bevezető feladat lényegében a múlt órát záró probléma továbbgondolása, ez teremt kapcsolatot az előző órai desmosos rajzkészítés, és az ezen az órán gyakorlandó behelyettesítés között.

Az óra második felében teljesen absztrakt függvényeket is tárgyalunk, előkészítjük az alapfüggvények grafikonjainak ismeretét. Az órának fontos eleme, hogy a diákok egyénileg végezzenek el sok behelyettesítést, és a kapott eredményeket egyénileg tudják ábrázolni. A csoport tudásától függően javasoljuk, hogy a grafikonkészítéses feladatokat akár több órán keresztül gyakorolják.

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Geogebra-animáció kivetítésének előkészítése** (két taxitársaság díjszabásának összehasonlítása): vetítő, internet-kapcsolat/oldal betöltése /fájl letöltése.

Link: <https://www.geogebra.org/classic/dmayfejb>

2. **Feladatsor nyomtatása** az órai munkához, fejenként egy példány.

Fájlnev: [függvények9_o6_melléklet_behelyettesítés_feladatsor](#)

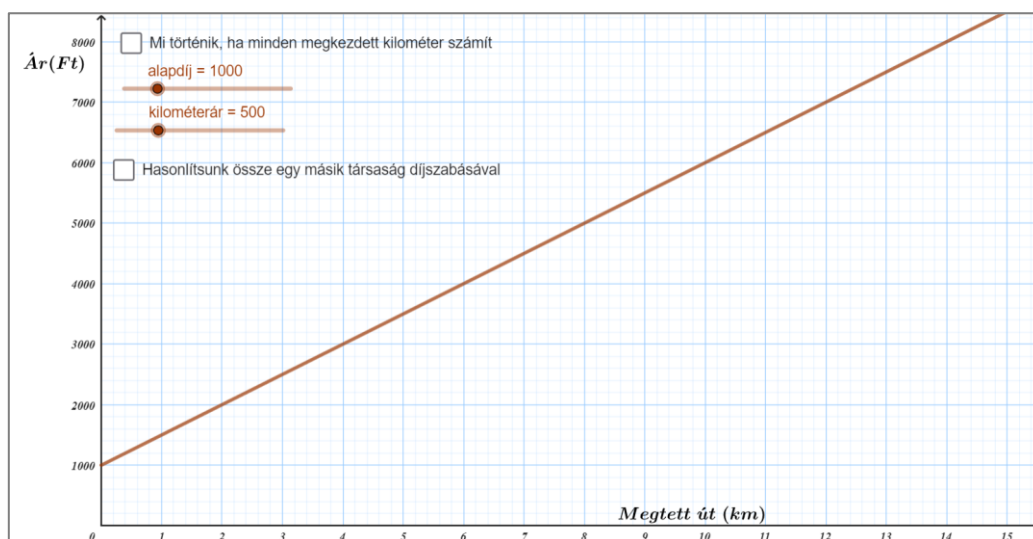
Az óra felépítése

1. Órakezdés, a taxis feladat kibontása (10 perc)

A szükséges adminisztráció után indítsuk az órát a GeoGebra-animáció kivetítésével! Először állítsuk be úgy, hogy csak egy taxitársaság díjszabása legyen látható.

Link: <https://www.geogebra.org/classic/dmayfejb>

Tanár: Az ábrán látható grafikont már alaposan végigbeszéltük az órán. Valaki össze tudná foglalni a múlt óra végén elhangzott legfontosabb dolgokat?



A múlt órai történések felidézését a csoport felkészültségéhez igazítjuk, illetve ahhoz, hogy milyen részletességgel sikerült a múlt óra végén a taxis feladatot átbeszélni. Az alábbi dolgok újbóli átbeszélését mindenképpen fontosnak tartjuk:

- Mely hozzárendelést ábrázoltuk, mi az alaphalmaz, mi a képhalmaz?
- Hogyan lehet leolvasni és hogy lehet kiszámolni, hogy mennyibe kerül pl. 6 km taxizás, és hogy mennyit taxizhatunk pl. 6000 Ft-ért?
- Hogyan kapcsolódik a múlt órán megbeszélt $f(x) = 1000 + 500x$ képlet a kivetített grafikonhoz?
- Mi történik, ha a csúszkán lévő értékeket elkezdem megváltoztatni?
- Hogyan kell behelyettesíteni a függvény képletébe?

Ha ezeket átbeszéltük, és a behelyettesítést is gyakoroltattuk párbeszédes formában, állítsuk vissza a csúszkákat a kezdőértékre (alapdíj=1000, kilométerár=500), majd rátérhetünk az újdonságra a múlt órai feladat kapcsán:

Tanár: A mostani geogebra-n megjelent egy felirat a múlt órához képest, látjátok? Belepipálok, nézzük, mi történik?

A Tanár kijelöli a jelölőnégyzetet. Először úgy tűnhet, nem történt semmi, hiszen a paraméterek mindkét esetben egyenlőek.

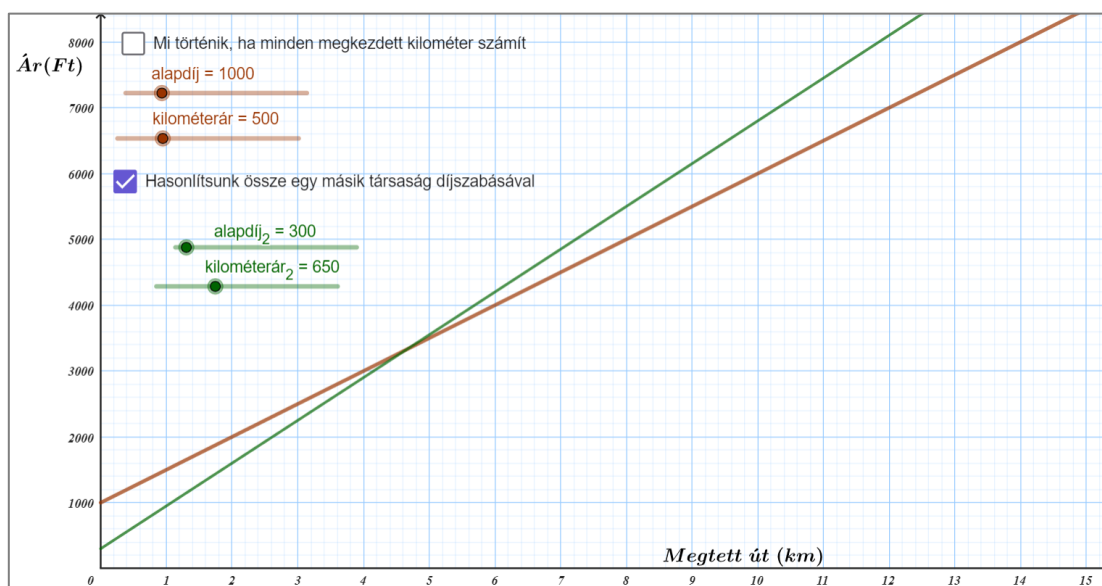
Tanár: Első ránézésre semmi nem történik. Mit csináljunk, hogy mégis történjen!

Diák: Állítsuk át az alsó két csúszkát!

Tanár: Nagyon jó, próbáljuk ki! És valóban, most már két grafikon látható a koordináta-rendszerben.

Tanár: Egy képzeletbeli városban két taxitársaság van, az egyik 1000 Ft alapdíjjal és 500 Ft kilométerdíjjal működik, a másik pedig 300 Ft alapdíjjal és 650 Ft kilométerdíjjal (a Tanár beállítja a megfelelő értékeket a csúszkákon).

Hasonlítsuk össze a két grafikon. Mit láttok? Miben térnek el a grafikonok?



Diák4: Más lett a két grafikon. A második társaság grafikonja lejjebből indul majd, a kilométerenkénti díj változtatásával pedig a dőlése fog megváltozni, meredekebb lesz.

Akár pontosíthatjuk is, hogy a 300 Ft a nulla km-es utazáshoz tartozó díjat fogja megadni, azaz a grafikon itt fogja metszeni az y-tengelyt, és a 650 Ft pedig a kilométerenkénti díjemelkedést fogja megmutatni, ezáltal változtatni a grafikon meredekségét.

Tanár: Tegyetek fel egy olyan kérdést a két grafikon látva, amelynek vizsgálata hasznos lehet a városban lévő emberek számára!

Az előző kérdésre valószínűleg érkeznek a válaszok között olyan, hogy hány kilométer utazása esetén melyik éri meg jobban. Ezen a ponton több lehetőségünk van, függően a csoport felkészültségétől, illetve attól, hogy állunk időben. Egyrészt nyitva hagyhatjuk a kérdést, feladva szorgalminak, másrészt folytathatjuk is közösen a következő módon:

Tanár: Arra kérdésre, hogy hány kilométer utazás esetén melyik társasággal éri meg jobban utazni, mit válaszolhatunk a grafikon alapján? Tudtok-e pontos számot mondani? Fogalmazzuk meg a kérdést a hozzárendelési szabályok nyelvén!

Diák3: Meg kell nézni, hogy a két grafikonnak hol lesz egyenlő értéke, azaz hol fogják egymást metszeni.

Diák4: Nehezen lehet leolvasni, hány km-nél lesz egyenlő a két érték.

Diák5: Azt a helyet keressük, ahol a két függvény ugyanahhoz a km-hez ugyanazt az árat rendeli, vagyis ahol a két függvény behelyettesítési értéke megegyezik.

Tanár: Számoljuk ki, hogy hány megtett kilométer után érdemes jobban az első taxitársasággal utazni!

Felírhatjuk az első képletet: $f(x) = 1000 + 500x$, illetve kitalálhatjuk a másik társaság díjszabásához tartozó képletet is: $g(x) = 300 + 650x$.

Azt az x helyet keressük, ahol $f(x) = g(x)$, azaz $1000 + 500x = 300 + 650x$. Az egyenletet megoldva $x = \frac{700}{150} \approx 4,67$, tehát körülbelül 4,7 km felett érdemes az első taxitársasággal utazni.

2. Behelyettesítéses feladatsor 1-3. feladat, önálló munka (17 perc)

Tanár: Kiosztok egy feladatsort, itt függvények különböző behelyettesítési értékeit kell majd kiszámolnotok, és a kapott eredményeket grafikonon ábrázolni. Azt szeretném kérni, hogy egyénileg dolgozzatok, de elakadás esetén nyugodtan beszéljétek meg a kérdéses pontokat a padtársatokkal!

Feladatsor fájlneve: # fv1_o6_melléklet_behelyettesítés_feladatsor

Módszertani megjegyzések

Bátorítsuk a diákokat, hogy a padtársak segítsenek egymásnak!

A következő órarészlet, az ellenőrzés közeledtével hívjunk ki három tanulót, akik felírják a három táblázatot, illetve felrajzolják a feladathoz tartozó grafikonokat a tábla különböző részeire. Így a megbeszélés kezdetekor már minden információ megtalálható a táblán.

3. Közös ellenőrzés (7 perc)

A közös ellenőrzés során a következő szempontokra érdemes hangsúlyt fektetni:

A behelyettesítés rutinjának elmélyítése

A behelyettesítést néhány esetben végeztessük el hangosan is, különböző diákokat felszólítva.

Hasonló grafikonok összehasonlítása

Hasonlítsuk össze óra eleji taxis és a mostani klímaszerelős feladat grafikonjait.

Mi az, amiben hasonló a kettő és miért lehet ez? Értelmezzük a függvény képletében található számokat!

A behelyettesítéssel kapott pontok összeköthetősége

Erre a problémára két feladat is rámutat, a 2. és a 3.

- Mindenképp érdemes hangsúlyosan kiemelni a 2. feladat által feltárt különbözőségeket. Itt látszik, hogy a hozzárendelési szabály még nem egyértelműsíti a grafikon, valamint az alaphalmaz foglalkozás nem felesleges precízkedés.
- A 3. feladatban pedig fontos kérdés, hogy a grafikon **görbül-e vagy nem**, a meglévő pontokat szakaszokkal, vagy ívesen próbáljuk-e összekötni. Erről érdemes a csoportot megszavaztatni, hogy lássuk, mit éreznek ők természetesnek. Próbáljunk tőlük érveket kérni sejtésük alátámasztására.

Az íves összekötöttség mellett szóló érvek:

1. Ha az egész grafikonnak van egy ívelése, miért lenne más a helyzet piciben, mint nagyban?
2. Az $x=1$ és $x=2$ -re adódó pontokat összekötő szakaszra pl. nem illeszkedik az $x=1,5$ -hez tartozó pont (hogy valóban nem, azt számolással tudjuk ellenőrizni).
3. Nézzük meg bármilyen grafikus ábrázoló programmal (GeoGebra, Desmos, Photomath), mindegyik mutatja az ívelést.

Egy alternatív díjszabás, a 3. feladat összehasonlítása a korábbi taxis feladattal

- Miben különbözik a most kapott taxis grafikon a korábbiaktól? Mennyibe kerül egy újabb kilométer megtétele 4 km után és 10 km után?
- Miért nem életszerűtlen az, amit látunk, azaz, hogy egy újabb kilométerért nem ugyanannyit kell fizetni az első pár kilométeren, mint utána? (Válasz: Amíg folyamatosan megy a taxi, addig van fuvarja. Ha az út vége felé kevesebb pénzt is keres, mint az elején, legalább keres pénzt, míg ha új fuvart kéne keresnie, akkor az új fuvarig senki nem fizet neki.)

4. Feladatmegoldás, egyéni/pármunka (8 perc)

Tanár: Eljött az a pont, amikor elszakadunk a való életből vett példák vizsgálatától. A következő feladatokban csak képleteket fogtok látni, ezekbe kell behelyettesítenetek különböző számokat, és ez alapján ábrázolni függvényt. A feladatlap 4. feladatán fogtok dolgozni, ügyeljete rá, hogy igényes ábrákat készítsetek. Ha ezzel megvagytok, rátérhettek az 5. feladatra is.

Időkeret

A feladatmegoldásra szánt idő alatt várhatóan csak a 4. feladatra jut majd idő, de a csoport gyorsaságától függően akár még kevesebb. A maradék feladatokból, elsősorban az 5. feladatból néhányat adjunk fel házi feladatnak, hogy a behelyettesítés és ábrázolás algoritmusa minél jobban rögzüljön.

Munkaforma

A feladatok megoldására mind az egyéni, mind a páros munka megfelelő. A tanár mérlegelje a csoport adottságait, és ez alapján döntse el, mennyire dolgozzanak össze a padtársak.

5. Összegzés, óra lezárása (3 perc)

Tanár: Most nézzük meg közösen a megoldásokat!

Alternatívák a megoldások bemutatására

- A grafikonok közül néhányat megint felrajzolhatnak a táblára a gyorsabb tanulók az előző rész végén, hogy ne az ellenőrzésre szánt idő menjen el a rajzolgatással.
- A függvények grafikonjai kivetíthetők a feladatlap megoldásaiból is.
- De legalább ilyen hasznos, ha a tanár élőben állítja elő egy dinamikus függvényábrázoló alkalmazásban ([Desmos](#), [Geogebra](#)), bemutatva, hogy mit hová kell írni a felhasználónak a grafikon kirajzoltatásához.

Lehetséges házi feladat: a feladatsor kimaradt részei, elsősorban az 5. feladat.

Mellékletek

GeoGebra-animáció

Az animáció annyiban tér el előző órán használttól, hogy egyszerre két taxitársaság tarifáját is láthatóvá lehet tenni, így lehetőség nyílik az összehasonlításra.

Link: <https://www.geogebra.org/classic/dmayfejb>

Behelyettesítést gyakoroltató feladatsor

Az órai munkához használt feladatsor. Az első három feladat még szövegesen megfogalmazott összefüggéseket tartalmaz, míg a negyedik és az ötödik feladatban már képlettel megadott függvényekkel kell dolgozni.

Fájlnév: [függvények9_06_melléklet_behelyettesítés_feladatsor](#)

Részletes nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: [függvények9_06_táblázatos_óravázlat_részletes](#)

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Fájlnév: [függvények9_06_táblázatos_óravázlat_A4](#)