

I. óra: Barangolás Kvartílián

Az óra célja: A különböző alapú számrendszerek megismerése, helyiértékek és jelentéseik elsajátítása különböző alapú számrendszerekben.

Előzetes tudás: hatványozás, tízes számrendszer

Központi fogalmak: helyiérték, alaki érték, valódi érték

Az óra legfontosabb elemei

A tanórán a diákok párban dolgoznak fel egy geogebra interaktív anyagot. Az anyag rámutat arra, hogy a számok lejegyzése függ attól, hogy hányasával gondolkodunk-csoportosítunk, és bemutatja, hogy a megszokott tíztől különböző csoportosítás esetén hogyan változik a számok lejegyzése.

A geogebra felfedezése után közös megbeszélés következik, amelyben kihangsúlyozzuk a legfontosabb gondolatokat, valamint áttekinthető jegyzetet készítünk közösen, a szerzett tapasztalatok alapján.

Az óra menetét nagyban meghatározza az, hogy a számrendszerek téma melyik tananyagba ékelődik bele. Elképzelésünk szerint ideális helye van a számelmélet tananyagba beágyazva, mert ekkor az oszthatósági szabályok kapcsán a diákok foglalkoznak a helyiértékes írásmóddal, amire itt is építünk.

Az óra felépítése

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1	A tízes számrendszer ismételése	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
2.	Barangolás Kvartílián	páros munka	tablet/telefon – geogebra classroom	20 perc
3.	Tapasztalatok lejegyzése	frontális munka	tábla, kréta	12 perc
4.	Az óra lezárása	frontális		3 perc

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. Geogebra feladat lemásolása, saját kódjának létrehozása.

Link: <https://www.geogebra.org/m/xxbyxhmz>

Fájlnév: [számrendszerek_01_melléklet_ggb_classroom_kisokos](#)

Opcionális:

- Ha van lehetőség **vetíteni**, akkor hasznos lehet az idő mérése látható formában, például a <https://pontosido.lovable.app/> oldal segítségével.

Az óra felépítése

1 A tízes helyiértékes számrendszer (10 perc)

Ha a tananyag nem a számelméletbe ékelődik, hasznosnak tartjuk a tízes számrendszerrel kapcsolatos ismeretek alaposabb átismétlését. Erre vonatkozó [tananyag](#) található a Számelmélet témakör hatodik órájánál, amelyben a tízes számrendszeren túl más számírásokkal is megismerkednek a tanulók.

Az előzményektől függően nagyon különböző lehet, hogy a tízes számrendszer ismételése mennyi időt vesz igénybe. A továbbiakban leírunk egy lehetséges bevezetést, de egyáltalán nem biztos, hogy az adott csoportnak ez megfelelő – elég. A kérdést a pedagógusnak magának kell mérlegelnie.

Tanár: Figyeljete, felírok a táblára egy „nagyon nehéz” összeadást, valaki el tudná végezni? Kérlek mondjátok is, ahogyan számoltok.

$$\begin{array}{r} 2 \ 7 \ 3 \\ + \ 6 \ 5 \ 1 \\ \hline \end{array}$$

Diák: $3+1=4$, $7+5=12$, leírom a 2-t, marad az 1, $2+6+1=9$, tehát a végeredmény 924.

Tanár: Nagyon jól számoltál, kösz! Viszont azt valaki meg tudná mondani, hogy miért működött az előbb hallott módszer? Mi van, ha a világ összes tanítónénije, aki ezt tanítja, egy nagy összeesküvés tagja, és valójában így nem is jól adunk össze két számot? Ki tudna meggyőzni arról, hogy az összeadásra tanult módszer jó? Miért úgy kezdődik a végeredmény például, hogy 900?

Diák: Hát az egyik számban van 200, a másikban 600, ami 800, meg még a tízesekből is jön egy száz, így jön ki a 900.

Tanár: Ó, hát ez remek megfigyelés! És elkezdte használni egy csomó érdekes szót: száz, tízes. Mik ezek, hogy hívtuk őket, emlékeztek?

Diák: Helyiértékek.

Tanár: Nagyon jól mondjátok. Ezt majd később le is jegyezzük, de folytassuk még picit az összeadás elemzését, induljunk az egyesektől. Miért az lett az utolsó számjegy, hogy 4?

Diák: Hát az egyik számban van 1 db, a másikban 3 db egyes, az összesen 4 db egyest jelent.

Tanár: Szuper! A következő számjegy miért 2?

Diák: Ez a számjegy jelöli, hogy hány tízesünk van, az egyik számban volt 7, a másikban 5, ami 12 db tízes csoport, de abból 10 db már egy százast alkot, tehát 2 db tízesünk marad.

Tanár: De miért kell a 12 darab tízest szétbontani egy századra és 2 tízesre? Miért nem írjuk le egyszerűen, hogy 12?

Diák: Hát azért, mert ha leírnánk, hogy 12, akkor az egyes már egy százast jelent, amiből viszont van még.

Tanár: Hol van még?

Diák: Hát a két szám elején van kétszáz meg hatszáz, ehhez jön az előbbi száz, ez adja együtt a 9 darab százast.

Tanár: És össze is állt, hogy miért 924 a végeredmény, a szám elején álló 9-es jelentését is szépen megmagyaráztad. Jó hír, hogy mégsem vertek át minket a tanító nénik.

Tanár: Amire építettünk tehát, azok a helyiértékek voltak, merthogy a számban szereplő számjegyek jelentése függött attól, hogy hol is állnak az adott számban.

Az itt következő rész nagyban függ a csoport előismereteitől. A kijelölt cél az alábbi táblázat elkészítése, ám hogy ehhez hány példa vizsgálatán keresztül vezet az út, azt a tanár tudja megítélni.

A közösen elkészített táblázat:

10-es helyiértékes számrendszer

10-féle számjegy: 0, 1, 2, 3, ..., 9

Helyiértéktáblázat

...	SZ	T	E	sz	t	e
...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
			1	4	5	6

$$1456 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

A 4-es számjegy alaki értéke 4, helyiértéke $10^2 = 100$, valódi értéke $4 \cdot 10^2 = 400$

2. Barangolások Kvartilián

Tanár: Korábban találkoztunk időben távoli kultúrák számolási szokásaival (pl. római számok). Most egy térben is igen máshol elhelyezkedő kultúra számolási szokásait fogjuk megismerni. Ehhez páronként szükségetek lesz egy telefonra/tabletre, kérlek vegyétek elő.

Ha megvagytok, kérlek fotózzátok be a kivetített QR kódot, vagy a www.geogebra.org/classroom weboldalon írjátok be a kivetített kódot.

A link mögött egy feladatlap rejlik, a ti dolgotok annyi, hogy szépen végigmenjete a kérdéseken és válaszoljatok rájuk. A feladatra 20 perctek van.

A tanár a geogebra classroom felülete segítségével folyamatosan követni tudja a válaszokat, azt, hogy ki hol tart. Az elakadóknak így könnyedén nyújthat segítséget. A geogebra classroom működésének leírása egy külön fájlban található.

3. Számrendszerek – tapasztalatok lejegyzése

A tanár figyelmet kér, és a diákok ötleteit és előbbi tapasztalatait használva elkészíti azt a vázlatot, amely tartalmazza a számrendszerekkel kapcsolatos legfontosabb ismereteket.

Tanár: Az előző tananyagban láthattátok, hogy bár számolni egyféleképpen szoktunk, de a számainkat lejegyezni már elég sokféleképpen le tudjuk. Mi okozta a különbséget az egyes bolygókön a számok lejegyzésében?

Diák: Hát az, hogy a számjegyek más méretű csoportokhoz tartoztak.

Tanár: Nézzünk egy példát! Idézzük fel, hogy a kilencet hogy bontja szét csoportokra és jegyzi le egy kvartilián lakó! /segédletként a geogebra kivetíthető/

Diák: A kilenc felbontható két négyes csoportra, és még marad egy. Ezt úgy írjuk fel, hogy 21.

Tanár: Na és egy oktáviai?

Diák: Oktávian a kilenchez kell egy darab nyolcas csoport, és marad még 1, ami miatt a lejegyzés itt 11.

Tanár: És melyik a helyes?

Diák: Mindkettő!

Tanár: Hogyhogy mindkettő? Az egyik azt írta le, hogy 21, a másik meg azt, hogy 11, valamelyiknek biztos rossznak kell lennie, nem?

Diák: /bizonytalan csend/

Tanár: Nyugi, csak provokáltalak titeket, igazából mindkettő helyes. Ugyanazt a dolgot miért ne jegyezhetnénk le többféle módon? Ugyanarra az állatra is van, aki azt mondja, hogy „kutya”, más meg azt, hogy „dog”, mégse mondhatjuk azt, hogy az egyik helyes, a másik meg nem. Vagy ugyanarra a távolságra valaki azt mondja, hogy 10 inch, más meg azt, hogy 25,4 cm. De matematikai példát is tudunk mondani, egy feladatra a $\frac{2}{5}$ és a 0,4 egyaránt jó megoldás lehet. Az, hogy hogy jegyünk le valamit, a dolgon magán nem változtat.

Tanár: A továbblépés előtt jöjjön egy másfél perces kis gyakorlat. Kérlek, írjátok le kvartíliaiul a kilencet, és oktáviaiul a tizenhetet. Ha segít, nyugodtan használjátok az előttek lévő appot.

A tanár felírja a két számot betűvel, és kívárja, amíg a csoport tanulói végiggondolják a számok alakjait.

Tanár: Az idő lejárt. A kilenc átírását előbb megbeszéltük, valaki segítsen a tizenhétben!

Diák: A tizenhét $2 \cdot 8 + 1$, van tehát 2 db 8-as csoport, meg még 1, oktávian tehát 21-nek írják.

A tanár felírja a számolást és mindkét szám alá a 21-et.

Tanár: Mindkettőhöz ez került: 21. Ez azért okozhat félreértést... Előbb beszéltünk a kutyáról és a dogról, az egyik magyarul van, a másik angolul, de ez nem zavar minket a megértésében, ha azt látom, hogy dog, tudom, hogy angolul van, és azt jelenti: kutya. Felírok viszont egy másik szót: ELEVEN. Itt is ilyen egyértelmű a helyzet?

Diák: Ez már nem, magyarul olvasva egy tulajdonság, angolul viszont egy szám.

Tanár: És miből derül ki, hogy melyik?

Diák: Hát, hogy a mondatban a körülötte lévő szavak angolul vagy magyarul vannak-e.

Tanár: Valóban, a szöveggörnyezet miatt itt sem nagyon lehet félreértés. A számoknál kicsit nehezebb a helyzet, mert itt a szöveggörnyezetre nem építhetünk. Éppen ezért mindig jelöljük, ha a csoportosítás alapja tíztől különböző: a szám után írjuk alsó indexbe, hogy hányasával csoportosítunk. Mit írjak akkor a kilenchez tartozó 21 mögé és mit a tizenhéhoz tartozóhoz:

Diák. Négyet és nyolcat.

A tanár odailleszti a két alapszámot a 21-ek után alsó indexbe.

Tanár: Kezdjük el összefoglalni, amiről idáig beszéltünk! Azt láttuk a geogébrás tananyagban, hogy ha van valahány kis téglalapunk, akkor a kis téglalapokat többféle rendszer szerint lehet csoportokba rendezni. Lehet például négyesével, vagy akár nyolcasával csoportosítani, számunkra legmegszokottabb a tízesével rendezés. Mivel számokhoz tartozó téglalapokat csoportosítottunk, rendszereztünk, a témánk neve: Számrendszerek.

A tanár rögzíti a címet a táblán.

Tanár: Mielőtt rátérünk a teljesen általános megközelítésre, nézzünk egy konkrét alapszámot. Legyen most a csoportosítás alapja a 7, tehát hetes számrendszerben számolunk. A csoportosítás folyamán mekkora csoportok keletkeznek?

Diák: Egyesek, hetesek, ha összegyűlik 7 db hetes, abból 49-es lesz.

Tanár: Tudná valaki más mondani, mi a következő csoportméret?

Diák: $49 \cdot 7$.

Tanár: Nagyon jó! Az értéke egyébként 343. Mi a közös a 7-ben, 49-ben és 343-ban?

Diák: Mindegyik a 7 hatványa.

Tanár: Szuper megfigyelés! Tehát az egyes helyiértékek a 7 különböző hatványait jelölik. És akkor, ha azt írom, hogy 254_7 , akkor melyik számot értem alatta, meg tudjátok mondani?

Diák: Ez a szám 2 db 49-es 5 db 7-es és 4 db egyes kupacból áll, tehát értéke 137.

A tanár rögzíti a számolást a táblán:

$$254_7 = 2 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 1 = 137$$

Tanár: Fantasztikus! Már csak egy dologra szeretnék választ kapni tőletek. A tízes számrendszer számjegyeit jól ismerjük. Milyen számjegyeket írhatok a hetes számrendszerbe? Írhatok-e például 8-ast?

Diák: Nem, mert a 8-ból kijön egy teljes, eggyel nagyobb méretű hetes kupac.

Tanár: Remek megfigyelés. Milyen számjegyek lehetnek tehát a 7-es számrendszerben?

Diák: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Tanár: És mi maradt ki?

Diák: Hát a 0.

Tanár: Pontosan, a 0 is nagyon fontos, így jön össze az a hét számjegy, amire szükségünk van a hetes számrendszerhez.

Tanár: Térjünk rá most az általános esetre. A csoportosítás alapja legyen a 7 helyett az n . Mekkora méretű csoportokkal dolgozunk ekkor?

Diák: Egyes, n -es, n^2 -es, n^3 -ös, stb.

Tanár: És milyen számjegyekre lesz szükségünk?

Diák: 0, 1, 2, ..., $n-1$

Tanár: Remekül összeszedtétek a szükséges ismereteket, itt az ideje lejegyezni őket!

A tanár a következő vázlatot készíti a táblára:

n alapú számrendszer

- a csoportosítás alapja: n
- n -féle számjegy: $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$
- a helyiértékek: $1, n$ -es, n^2 -es, stb.
- a számrendszer alapját a szám után alsó indexben jelöljük, pl. 2043_7 .

Példa: A hetes számrendszerben

- a számjegyek lehetnek $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- A helyiértékek pedig 1 -eseket, 7 -eseket, 49 -eseket, 343 -asokat, stb. jelentenek.
- Az 2043_7 jelentése: $2043_7 = 2 \cdot 343 + 0 \cdot 49 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 717_{10}$

Helyiértéktáblázat

...						
...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
			1	4	5	6

$$1456 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

A 4 -es számjegy alaki értéke 4 , helyiértéke $10^2 = 100$, valódi értéke $4 \cdot 10^2 = 400$

4. Az óra lezárása (3 perc)

Tanár: A mai órán megismerkedtünk a számrendszerekhez szükséges elméleti tudnivalókkal. A következő órán azt fogjuk gyakorolni, hogy hogyan lehet egyik számrendszerből a másikba közlekedni.

Mellékletek

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.