VII. óra: Oszt 6 OK?

Az óra célja: Az eddigi oszthatósági szabályok rendszerezése, összetett oszthatósági szabályok megismerése és gyakorlása.

Előzetes tudás: oszthatóság, prímtényezős felbontás, oszthatósági szabályok

Központi fogalmak: oszthatósági szabályok, állítás és tagadása, prímtényezők

Az óra legfontosabb elemei

Az előző órán hosszan vizsgáltuk azt, hogy a helyiértékeknek mi köze van az oszthatósági szabályokhoz. Az összetett oszthatósági szabályok kicsit más megközelítést igényelnek: az eddigi módszerek mellé oda kell tenni a prímtényezős felbontásból következő megfigyeléseket.

Bár eljárhatnánk úgy is, hogy a megfelelő szabályokat gyorsan ismertetjük, majd nekiállunk a nagyüzemi gyakorlásnak, most nem ezt az utat választjuk. Úgy gondoljuk, hogy az összetett oszthatósági szabályok jó alkalomként szolgálnak arra, hogy megvizsgáljuk egy adott számmal osztható számok „ritmusát" a számegyenesen, valamint a logika elemeit is gyakoroljuk állítások megfogalmazásával és azok indoklásával.

	Idő	***Rövid leírás***	***Módszer***	***Segédeszköz***
1.	5 p	**Órakezdés, feladatellenőrzés**	frontális megbeszélés	tábla, kréta
2.	9 p	**Oszthatósági szabályok rendszerezése**	frontális megbeszélés	tábla, kréta
3.	15 p	**Számtáblázat és oszthatóságok**	pármunka, frontális megbeszélés	prezentáció, számtáblázat
4.	15 p	**Összetett oszthatósági szabályok megfogalmazása**	frontális megbeszélés	prezentáció
5.	1 p	**Az óra lezárása**	tanári közlés	oszthatósági szabályok feladatlap

Az óra előkészítése

Szükséges előkészületek:

1. **Prezentáció kivetítése**
   számelmélet_07_melléklet_oszthatósági szabályok
2. **Számtáblázatok** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően.
   számelmélet_07_melléklet_számtáblázat

Az óra felépítése

1. Órakezdés, feladatellenőrzés (5 perc)

Módszertani megjegyzés

A tanár köszönti a diákokat, és közösen megbeszéli velük az előző óra végén kiadott feladat megoldását. Érdemes törekedni arra, hogy minél inkább a diákok mondják a megoldásokat és a gondolkodás alapját képező szabályokat, hiszen ezeket fogjuk a továbbiakban is használni.

Az 1/a,c,d feladatot mindenképpen javasoltuk, ennek leírása következik.

Oszthatósági feladatlap 1/a,c,d feladat:

Hányféle módon lehet az ismeretlenek helyére számjegyeket írni úgy, hogy

a) $\overline{2a3}$ osztható legyen 3-mal;

c) $\overline{742xy}$ osztható 4-gyel és 5-tel; d) $\overline{37x34y}$ osztható 4-gyel és 9-cel?

Megoldás:

a) $a \in \{1; 4; 7\}$, tehát **3** eset van.

c) $y = 0, x$ tetszőleges páros, tehát **5** eset van.

d) Az (x; y) párok lehetséges értékei: (1; 0), (6; 4), (2; 8), tehát **3** eset van.

2. Oszthatósági szabályok rendszerezése (9 perc)

Módszertani megjegyzés

Ennek az órarésznek az a célja, hogy az eddigi oszthatósági szabályokat rendszerezzük, rögzítsük. Azért, hogy az esetlegességeket elkerüljük, a frontális megbeszélést javasoljuk.

A tanár a következő kérdések mentén eleveníti fel és összegzi a múlt órán tanultakat:

Tanár:

- Az eddig tanult oszthatósági szabályoknál mit vizsgáltunk meg egy-egy szám esetén? Tudunk-e két különböző csoportot felállítani? (végződés szerint, számjegyek összege szerint)
- Az 5-tel való oszthatóságnál miért volt elég az utolsó számjegyet nézni, a 4-gyel való oszthatóságnál miért nem elég az utolsó, miért kell az utolsó kettő számjegyből képzett számot vizsgálni? (a helyiértékes alak felelevenítése)
- Miért nem jó az alábbi szabály: „Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegye osztható 4-gyel.”? Hogy szólna a szabály helyesen? (példa: 412)
- Mely oszthatóságok látszanak az utolsó jegyből, melyek az utolsó kettőből, melyek az utolsó háromból? Gyűjtsünk minél több példát!

Módszertani megjegyzés

Az előző kérdések megvitatása alapján az alábbi vázlat lejegyzését javasoljuk.

A tanár ellenőrzi, hogy a vázlat mindenkinek a füzetébe bekerüljön.

Oszthatósági szabályok

Három alaptípus:

A) Végződés alapján:
- Utolsó számjegy: 2-vel, 5-tel, 10-zel
- Utolsó két számjegyből képzett szám: 4-gyel, 100-zal, (25-tel)
- Utolsó három számjegyből képzett szám: 8-cal, 1000-rel

B) Számjegyek összege alapján: 3-mal, 9-cel

C) *(ezt egyelőre üresen hagyjuk)*

3. Számtáblázat és oszthatóságok (15 perc)

Módszertani megjegyzés

A következő részben az oszthatósági szabályok mellé újabb megfigyeléseket teszünk, ehhez néhány háromjegyű számot vizsgálunk meg oszthatósági szempontból. A diákok használhatnak számológépet, de biztassuk őket a szabályok alkalmazására.

A tanár elindítja a prezentációt és elmondja, hogy mi lesz a feladat.

Tanár: Előbb összegyűjtöttök az oszthatósági szabályokat, most lehetőségetek lesz jó sokszor gyakorolni őket. Egy számtáblázatot láttok kivetítve, mindjárt ki is fogom osztani nektek. A táblázatnak 25 mezője van, minden mező közepén egy főszám áll, melyek egyesével növekszenek 100-tól 124-ig. A főszámok körül kis keretezett számokat láthattok. Az első feladatotok az lesz, hogy minden egyes mező esetében azokat a keretezett számokat színezzétek be, amelyek osztói a főszámnak (pl. 112 esetén színezzétek be a $\boxed{2}$ -t és a $\boxed{4}$ -et, de a $\boxed{3}$ -at ne). Hasznos, ha a $\boxed{2}$ -eseket mindenütt egyforma színűvel színezitek, a $\boxed{3}$ -asokat egy másik színnel, stb.

Miután elvégeztétek a színezést, próbáljátok megfigyelni, milyen mintázatot adnak ki azok a mezők, ahol a $\boxed{2}$ be van színezve! Tegyétek meg ugyanezt a beszínezett $\boxed{3}$-asokkal is, stb. Próbáljátok indokolni az észrevételeiteket!

A feladatra összesen 10 percetek van. A táblázatotokat egyedül színezgessétek, de nyugodtan egyeztessétek a párotokkal azt, amire jutottatok.

Módszertani megjegyzés

A tanár kiosztja a táblázatokat, felügyeli a munkát és segít az elindulásban azoknak, akik már az elején elakadtak. A 10 perc végére remélhetőleg minél több párnál rajzolódik ki az alábbi színezés:

2 3 4 **100** 5 6 12	2 3 4 **101** 5 6 12	2 3 4 **102** 5 6 12	2 3 4 **103** 5 6 12	2 3 4 **104** 5 6 12
2 3 4 **105** 5 6 12	2 3 4 **106** 5 6 12	2 3 4 **107** 5 6 12	2 3 4 **108** 5 6 12	2 3 4 **109** 5 6 12
2 3 4 **110** 5 6 12	2 3 4 **111** 5 6 12	2 3 4 **112** 5 6 12	2 3 4 **113** 5 6 12	2 3 4 **114** 5 6 12
2 3 4 **115** 5 6 12	2 3 4 **116** 5 6 12	2 3 4 **117** 5 6 12	2 3 4 **118** 5 6 12	2 3 4 **119** 5 6 12
2 3 4 **120** 5 6 12	2 3 4 **121** 5 6 12	2 3 4 **122** 5 6 12	2 3 4 **123** 5 6 12	2 3 4 **124** 5 6 12

Módszertani megjegyzés

A tanár kivetíti a helyes színezést (prezentáció 2. dia), közösen ellenőrzik, és az alábbi észrevételek mentén átbeszélik az eddigi tapasztalatokat:

Tanár:

- Végig kellett-e nézni az összes számra az oszthatósági szabályokat, hogyan lehetett esetleg gyorsítani a színezésen? (pl. ha kihasználtuk, hogy pl. minden harmadik szám osztható 3-mal, akkor elég volt egy hárommal oszthatót megtalálni, majd ebből kiindulva hármanként lépkedve kaphattuk a többi 3-mal oszthatót)
- Mi az oka a páros számok sakktáblaszerű elhelyezkedésének? Mi az oka a 3-mal osztható számok átlós elhelyezkedésének, a 4-gyel oszthatóak „visszafelé átlós" elhelyezkedésének? (A páros számok mintázata azért lesz sakktáblaszerű, mert minden második szám színeződik és a sorátlépésnél eggyel elcsúszunk a felső sorhoz képest. A 3-mal oszthatóaknál azért rajzolódnak ki az átlós vonalak, mert egy 3-mal osztható számról 6-ot előrelépve újra 3-mal oszthatót kapok, és a táblázatban egy számból az alatta lévő szám jobb szomszédjáig 6 lépés vezet.)

Módszertani megjegyzés

Érdemes rámutatni arra is, hogy a színezés periódusaival már találkoztunk, mégpedig az osztógrafikonnál. A párhuzamot tovább erősíti, hogy bár kicsit másképp, de a ferde egyenesek ott is fontos szerephez jutnak. Az osztógrafikon éppen ezért a prezentációban is megtalálható (3. dia)

Tanár: Az előbb láttuk, hogy milyen szabályosságok figyelhetőek meg egy adott szín kapcsán. Most koncentráljunk egy-egy mezőre! Jól láthatóan nagyon változó, hogy melyik alapszám mezőjén hány négyzetet színeztünk be, összefüggésben azzal, hogy az alapszám mennyire gazdag osztókban. Vannak esetleg olyan színezések, amelyek mindig együtt járnak?

Diák: Például a 2 és a 4 színezése?

Tanár: Alapvetően jó, de pontosítsd egy kicsit! Például a 122-nél a 2 színezve van, de a 4 nincs. Akkor mégsem jár mindig együtt a kettő.

Diák: Úgy értettem, hogy ha valahol a 4-et beszíneztem, akkor ott a 2 is biztosan színezve volt.

Tanár: És hogyan lehetne lefordítani ezt a színezős állítást oszthatósági nyelvre?

Diák: Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.

Tanár: Remek! A következőkben ilyenfajta állításokat kell kigondolnotok a táblázat megfigyelése alapján.

4. Összetett oszthatósági szabályok megfogalmazása (15 perc)

Módszertani megjegyzés

A tanár átlépteti a prezentációt a következő, hiányos állításokat tartalmazó diára.

Tanár: A most látható dián megjelent négy hiányos mondat, mindegyiket egészítsétek ki fejenként legalább egyféle módon anélkül, hogy a párotokkal egyeztetnétek. A mondatok között legyen olyan is, amelyik nem igaz. Ha megvagytok, az állításaitokat mondjátok el a párotoknak, akinek el kell döntenie, hogy az általatok mondott szabály igaz-e. Lehetőleg gondolkodjatok azon is, hogy egy-egy szabály helyességét hogyan tudnátok megindokolni. A feladatra 10 percetek van.

Módszertani megjegyzés:

Ha a csoportban több a bizonytalan diák, adjunk választási lehetőséget a pároknak:

A) akik magabiztosak, csinálják a feladatot a leírt formában;
B) akik nem, azok próbáljanak minél több helyes szabályt összegyűjteni.

A kiegészítendő állítások:

Ha egy szám osztható ...., akkor osztható ... is.

Ha egy szám osztható ..., akkor nem biztos, hogy osztható ... .

Ha egy szám nem osztható ..., akkor nem osztható ... sem .

Ha egy szám osztható ... és ..., akkor osztható ... is.

Módszertani megjegyzés

A tanár körbejárva követi a diákok munkáját, figyeli, hogy milyen állítások, érvek hangzanak el, mert ezek közül valószínűleg több is beépíthető a folytatásba.

Az idő lejártával a tanár összegyűjti a figyelmet és néhány állítást kihangosít, majd megbeszélik azokat indoklással együtt. Az olyan mondatokat, amelyek igazságában vita volt egy-egy páros tagjai között, feltétlenül érdemes közösen megbeszélni. Az alábbi gondolatokon véleményünk szerint mindenképpen hasznos végigmenni:

Tanár:

- Hogyan indokoljuk, hogy nem igaz: „Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 3-mal is.”? (Adjunk ellenpéldát.)
- Igaz-e, hogy ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is? Miért? (Ha a szám osztható 4-gyel, akkor a prímtényezős felbontásában van legalább 2 db 2-es, ekkor viszont biztosan páros is).
- Mit mondhatunk az előző állítás megfordításáról?
- Miért igaz: „Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is.”? (A 2-vel és 3-mal oszthatóság miatt a szám prímtényezős felbontása tartalmazni fog 2-es és 3-as prímtényezőt, ezek szorzata 6, tehát a szám osztható 6-tal).
- Az előző állítás hogyan jelenik meg a táblázat színezésében?

- Igaz-e: „Ha egy szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor 12-vel is.”? (Nem, a 6 vagy a 18 is ellenpélda, a táblázatból pedig a 114.)
- Miért nem működik az előző indoklás (ha 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is) ebben az esetben? (Ha valami osztható 6-tal, akkor már a 2-vel oszthatóság nem ad új információt, a 6-tal oszthatóság már magában foglalja azt).
- Mi lenne megfelelő szabály a 12-vel vett oszthatóságra? („Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor 12-vel is.”)
- Miért igaz az előző álltás? (A 4-gyel való oszthatóság biztosít a prímtényezős felbontásban 2 db 2-est, a 3-mal oszthatóság 1 db 3-ast, tehát a számnak osztója lesz a $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$)
- Érdemes arra is kitérni, hogy a 12-vel való oszthatóság esetén azért működött a 3-mal és 4-gyel oszthatóságra felbontás, mert 3 és 4 relatív prímek, a legkisebb közös többszörösük pedig a 12, ami a 6-ra és 2-re nem igaz. Ez a szempont újabb összetett oszthatósági szabályok kitalálásához is hasznos.

Módszertani megjegyzés

A kérdések megbeszélése után a tanár a csoporttal együttműködve rögzíti a legfontosabb összetett oszthatósági szabályokat:

Oszthatósági szabályok - folytatás

C) Összetett oszthatósági szabályok

- 6-tal: Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha 2-vel és 3-mal egyaránt osztható.
- 12-vel: 3-mal és 4-gyel
- 15-tel: 3-mal és 5-tel
- 18-cal: 2-vel és 9-cel

5. Az óra lezárása (1 perc)

Tanár: A mai órán rendszereztük a korábban tanult oszthatósági szabályokat, majd gyakoroltuk ezeket egy számtáblázat színezésének segítségével. A feladat kapcsán ezután összetett oszthatósági szabályokat is megfogalmaztatok, melyeket közösen is alaposan átbeszéltük.

Javasolt házi feladatok

A tanár kitűzi azokat a feladatokat az oszthatósági szabályok feladatlapról, amelyeket célszerűnek gondol otthoni gyakorlásra. A feladatlap 4. feladata mindenképpen szerepeljen, erre építünk ugyanis a következő órán.

Mellékletek

Prezentáció

számelmélet_07_melléklet_oszthatósági szabályok

Számtáblázat

számelmélet_07_melléklet_számtáblázat

Oszthatósági szabályok feladatlap

számelmélet_06_07_melléklet_oszthatósági feladatlap

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

számelmélet_07_melléklet_táblázatos óravázlat