

VI. óra: Így írunk mi

Az óra célja: A tízes helyiértékes számrendszer működésének és az oszthatósági szabályoknak a (mélyebb) megértése.

Előzetes tudás: tízes számrendszer, római számok, oszthatóság, maradék, oszthatósági szabályok

Központi fogalmak: tízes számrendszer, helyiérték, alaki érték, valódi érték, oszthatósági szabályok

Az óra legfontosabb elemei

	Rövid leírás	Módszer	Segédeszköz	Várható időtartam
1.	Római és óegyiptomi számírás ismétlése/megismerése	egyéni- és pármunka	Számírási feladatlap	15 perc
2.	A tízes helyiértékes számrendszer	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
3.	Oszthatósági szabályok 5-re és 9-re	frontális megbeszélés	táblázatok, számok	12 perc
4.	Feladatmegoldás	egyéni- vagy pármunka		6 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán megismerkedünk két régebben használt számírással: a római és óegyiptomi számírással. Ezekkel összehasonlítva átismétljük a tízes helyiértékes számrendszer működését, majd indokoljuk a felső tagozaton megismert oszthatósági szabályok helyességét.

Az óra előkészítése

Szükséges:

- Számírások feladatlap** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően: páronként egy-egy kell a feladatlap két oldalából (egy római számos feladatlap és egy óegyiptomi számírási feladatlap).
- Oszthatósági szabályok feladatlap** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően.

Opcionális:

- Ha van lehetőség **vetíteni**, akkor hasznos lehet az idő mérése látható formában, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Számírások (15 perc)

Tanár: Ezen az órán megismerünk két, régi időkben használt számírást. Alkossatok párokat! A pár egyik fele a római számírással, a másik fele az óegyiptomi számírással kapcsolatos feladatokat fog kapni. A feladatok megoldásához használhattok internetes segítséget. A saját feladataitok megoldására kb. 10 perccel van. Utána van további 5 perccel arra, hogy bemutassátok egymásnak a tanult számírást, és közösen tanulságokat vonjatok le. Jó munkát!

Módszertani megjegyzések: A párok lehetnek az egymás mellett ülő tanulók, de dolgozhatunk véletlenszerű párokkal is, ehhez használhatjuk például a <https://flippity.net/> „Random name picker” alkalmazását.

A kétféle feladatlap biztosítja, hogy a pár mindkét tagja aktívan részt vegyen a munkában. Fontos elem az egymásnak történő magyarázat, ebből sokat tanulhatnak a diákok.

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével! Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadó tanulóknak, hallgassuk meg, hogyan magyaráznak egymásnak!

2. A tízes helyiértékes számrendszer (10 perc)

Módszertani megjegyzések

A következő részben átismétljük a tízes helyiértékes számrendszerről tanultakat. A két megismert számírás segítheti ennek mélyebb megértését.

Tanár: Na, milyen tanulságokat vontatok le a feladatok megoldásából?

Diák: Hogy sokkal egyszerűbb a mi számírásunk!

Tanár: Hogy érted, hogy sokkal egyszerűbb? Nem csak arról van szó, hogy mi ezt szoktuk meg? Mi az, ami szerintetek nehézséget okozhatott a vizsgált számírásoknál?

Diák 1: Az óegyiptomi számírásnál nem is világos, hogyan lehet egy nagyobb számot megadni, elvileg végtelen sok jelre lenne szükség.

Diák 2: Nekünk a római számokkal kellett számolni és muszáj volt átírnom a számokat a mi számírásunkba, mert fogalmam sem volt róla, hogy milyen eljárással lehetne római számokat összeadni, illetve kivonni.

...

Tanár: Szedjük akkor össze, hogy milyen is az a számírás, amit mi használunk! Egyáltalán hogy hívjuk ezt a számírást, hogyan szoktak rá hivatkozni?

Diák: A mi feladatlapunkból kiderült, hogy hindu-arab számírásnak szokták hívni.

Tanár: Igen. És milyen ez a számírás?

Diák: 10-es számrendszert használunk.

Tanár: Nagyon jó! Mit jelent ez?

Diák: Hogy számoláskor az egyeseket 10-es csoportokba rendezzük, a 10-eseket újból 10-esével 100-as csoportokba, stb.

Tanár: És különbözik ebben a mi számírásunk a rómainál vagy az óegyiptomitól?

Diák 1: Tulajdonképpen nem. Az óegyiptomiak 10 egyest (pálcát) szintén egyesítenek és 1 tízest (kaput) kapnak, stb.

Diák 2: A rómaiaknak is van külön jelük az 1-re, 10-re, 100-ra, 1000-re, csak ők bevezettek külön jelet az 5-re, 50-re, 500-ra is. De a számok leírásának logikája náluk is tükrözi a tízes számrendszer logikáját.

Tanár: Valóban, mindkét megismert számírás tekinthető 10-es számrendszerbeli számírásnak. De akkor miben különbözik ezektől a miénk?

Diák: Abban, hogy hányfajta jel van, ahogy ezt előbb megbeszéltük.

Tanár: Igen ebben például. És abban, hogy egy adott szám leírásához hány darab jelet kell felhasználnunk, abban van-e különbség?

Diák: A hindu-arab számírásban a több jegyből álló szám mindig nagyobb, a római számoknál ez nem feltétlenül igaz.

Tanár: Tudsz példát mondani?

Diák: Például az L többet ér, mint a XLVIII.

Tanár: Ez kiváló példa. A jelek száma tehát az arab számok esetén sokkal informatívabb. És azt mi teszi lehetővé, hogy például egy 1-es számjegy nálunk különböző szerepben is felbukkanhat, például a 112-ben lévő két egyes egész más jelent.

Diák: A mi számírásunkban fontos, hogy melyik jel hol van.

Tanár: Nagyon jó, amit mondasz. Bár az is igaz, hogy elvileg az egyiptominál is megvolt határozva a kiolvasás iránya, és a római számoknál is nagyon fontos, hogy mi a jelek sorrendje. Tudtok mondani két olyan római számot, ami ugyanazokból a jelekből áll, de az értékük mégsem egyenlő?

Diák: IX és XI.

Tanár: Szuper. Visszatérve, az arab számokra, ott mindenképpen igaz, hogy a jelek helye nagyban befolyásolja, hogy mit jelentenek, tehát összességében meghatározza a szám értékét. Ezért is hívjuk helyiértékes számírásnak. Térjünk rá a felhasznált jelek számára. Mit mondhatunk el róluk?

Diák: 10 féle számjegyet használunk.

Tanár: Igen. Hány jelet használnak a római számoknál, illetve az óegyiptomi számírásnál?

Diák: Igazából kevés félét, de a nagy számokat így sem tudják leírni. Pl. nem világos, hogy a rómaiak hogyan írnák le a 10 000-et, mert arra nincs jelük.

Tanár: Ez nagyon bölcs meglátás. Ezzel szemben mi 10-féle számjegy segítségével akár nagyon nagy számokat is le tudunk írni. Szedjük össze a táblán mindazt, amit megbeszéltünk:

...

10-es helyiértékes számrendszer

10-féle számjegy: 0, 1, 2, 3, ..., 9

Helyiértéktáblázat

...	SZ	T	E	sz	t	e
...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
			1	4	5	6

$$1456 = 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

A 4-es számjegy alaki értéke 4, helyiértéke $10^2 = 100$, valódi értéke $4 \cdot 10^2 = 400$

Módszertani megjegyzések: A fentiek a diákok korábban már részletesen tanulták, ennek a résznek a célja az ismétlés, tudatosítás.

Ha van rá idő, röviden kitérhetünk a tizedes törtekre is.

3. Oszthatósági szabályok 5-re és 9-re (10 perc)

Tanár: Láttuk, hogy a mi számírásunk előnye, hogy akár nagyon nagy számokat is fel tudunk írni mindössze 10-féle jel felhasználásával. Előnye az is, hogy műveletek végzésére kiválóan alkalmas. De térjünk vissza egy kicsit az oszthatósághoz. Le tudátok olvasni az 5-tel való oszthatóságokat a római, illetve az óegyiptomi számokról?

Diák: Igazából az 5-tel való oszthatóság mind a római számokról, mind az óegyiptomi számokról könnyen leolvasható, mert elég volt a számok „végét” vizsgálni.

Tanár: Miért?

Diák: Mert az egyeseket/pálcákat leszámítva az összes jel 5-tel osztható számot jelöl. Így az 5-tel való osztási maradék megállapításához elég ezeket vizsgálni. De persze figyelni kell arra, hogy a római számírásban az IV 4-et, az IX pedig 9-et jelent.

Tanár: Hogyan állapítanád meg az 5-tel való osztási maradékot a mi számírásunkban?

Diák: Ott is a szám végét, az utolsó számjegyet kell vizsgálni.

Tanár: Miért?

Diák: Mert az összes többi helyiérték és így az ott szereplő számok valódi értéke is osztható 10-zel, így 5-tel is.

Tanár: Nagyon jó, írjuk fel ezeket az 1456 példáján:

$$1456 = \underbrace{1 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10}_{5\text{-tel osztható rész}} + 6 \cdot 1, \text{ tehát } 1 \text{ maradékot ad } 5\text{-tel osztva.}$$

Egy szám ugyanazt a maradékot adja 5-tel osztva, mint az utolsó számjegye.

Tanár: Ez alapján mikor lesz egy szám 5-tel osztható?

Diák: Ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Tanár: És mit kellett vizsgálni a 4-gyel való osztási maradék megállapításához?

Diák: Az utolsó két helyiértéken szereplő számjegyet.

Tanár: Magyarázzuk meg, hogy miért!

Diák: Mert a százaz és annál nagyobb helyiértékek oszthatók 4-gyel.

Tanár: És mit kellene vizsgálnom egy óegyiptomi számírásban felírt számnál?

Diák: A pálcákat és kapukat.

Tanár: Mielőtt továbbmennénk, oldjunk meg egy feladatot! Felírok valamit a táblára:

$$\overline{35x0}$$

Hogy kell ezt érteni? Mi ez a felülvonás?

Diák: Így jelöljük azt, hogy az itt szereplő számok összetartoznak, ez egy négyjegyű szám. A 3. számjegyet nem ismerjük, ezért jelöltük x -szel.

Tanár: Igen. Szeretném, ha megállapítanátok, hogy x mely értékei esetén osztható ez a szám 5-tel, illetve 4-gyel.

Na, mire jutottatok?

Diák: 5-tel x tetszőleges értéke esetén osztható lesz, mivel az utolsó számjegye 0.

Tanár: Igen, igazad van. És mi a helyzet a 4-gyel?

Diák: 4-gyel akkor lesz osztható, ha az utolsó két számjegy osztható 4-gyel.

Tanár: Ez a szabály így nem teljesen pontos.

Diák: Mármint az utolsó két számjegyből képzett kétjegyű számnak kell 4-gyel oszthatónak lennie, azaz most a páros x értékek (0, 2, 4, 6, 8) jók.

Tanár: Szuper! Most térjünk át egy kicsivel nehezebb kérdésre. Hogyan állapítjuk meg a 9-cel való oszthatóságot a mi számírásunkban?

Diák: A számjegyek összegét vizsgáljuk.

Tanár: Meg tudjuk magyarázni, hogy miért? Mit mondhatunk most a helyiértékekről?

Diák: Hát, a 10-hatványok nem oszthatók 9-cel. De a nálunk 1-gyel kisebb számok igen.

**Módszertani
megjegyzés**

Adjunk 1-2 perc
gondolkodási
időt.

Tanár: Igen, ez olyan jó ötlet, hogy írjuk is fel őket így, majd csoportosítsuk külön a 9-cel osztható részeket:

$$1456 = 1 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 1 \cdot (999 + 1) + 4 \cdot (99 + 1) + 5 \cdot (9 + 1) + 6 \cdot 1$$

$$=$$

$$\underbrace{1 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9}_{9\text{-cel osztható rész}} + 1 + 4 + 5 + 6, \text{ tehát } 7 \text{ maradékot ad } 9\text{-cel osztva.}$$

Egy szám ugyanazt a maradékot adja 9-cel osztva, mint a számjegyei összege.

Tanár: Átültethető valahogyan ez a módszer az óegyiptomi számírásra?

Diák: Igen, minden jel 1 maradékot ad 9-cel osztva, így csak meg kell számolnunk a jelek számát, és annak venni a 9-es maradékát.

Tanár: Nagyon jó, kiválóan megfogalmaztad ezt.

4. Feladatmegoldás (5 perc)

Tanár: Kiosztok egy feladatlapot, oldjátok meg az eddigiek gyakorlásaképpen az első feladatot. Dolgozhattok egyénileg vagy párban.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán átismételtük a hindu-arab számírás jellemzőit, és a mi számírásunkban használható oszthatósági szabályok egy részét.

Javasolt házi feladat: A feladatlap 1. feladatának befejezése.

Módszertani megjegyzés

Ha úgy érezzük, hogy a csoportból még sokan igénylik, akkor megbeszélhetünk további feladatokat közösen.

Módszertani megjegyzés: Biztosan nem fér bele ebbe az órába, de ha tudunk rá több időt szánni, akkor esetleg lehet beszélgetni arról, hogyan számoltak az óegyiptomi számírásban. Egy rövid összefoglaló olvasható itt: https://tig.kgk.uni-obuda.hu/vir/anyag/sztech_tort/Egyiptom.html

Izgalmas beszélgetésre adhat módot az, hogy mennyire megköti a számok leírásának módja azt, hogyan tudunk velük műveleteket végezni. Vagy egy kicsit tágabban: hogyan köti meg a gondolkodásunkat az, hogy milyen modelleket, megközelítéseket használunk.

Ez utóbbira lehet példa még az alábbi feladat:

Euklidesz: Elemek című 2300 éves könyvében olvasható:

„Ha egy egyenesszakaszt tetszőlegesen kettéosztunk, akkor a teljes szakaszra és az egyik részre emelt két négyzet együttevén egyenlő a teljes szakasz és az említett része által meghatározott téglalap kétszeresének és a másik részre emelt négyzetnek az összegével.”

Milyen azonossággal írható le a tétel állítása?

A geometriai megfogalmazás és az algebrai formula összetettsége közti különbség jól mutatja, hogy mennyit számít, hogy egy igazságot milyen nyelven fogalmazunk meg: míg jelen esetben az algebra nyelvén egy nem túl bonyolult összefüggést kapunk, ha viszont Euklidesz megfogalmazását akarjuk kibogozni, az energiáink nagy része a szöveg dekódolására megy el.

Ez a példa is mutatja, hogy egy-egy matematikai eszköz megjelenése (pl. a betűkifejezések használata, mely a görögöknek még nem állt a rendelkezésére) mekkora lökést adhat a tudomány fejlődésének. Míg a betűkifejezések megjelenése matematikai igazságok leírásának roppant praktikus eszközévé vált, és egyúttal új utakat is nyitott, az arab számokra áttérés a számolási mechanizmusokat egyszerűsítette le és tette lényegesen átláthatóbbá.

Mellékletek

Számírási feladatlapok

Oszthatósági szabályos feladatlap

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.