V. óra: A legnagyobb KO

Az óra célja: A prímtényezős felbontás mélyebb megértése, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös meghatározása a prímtényezős felbontásból.

Előzetes tudás: hatványozás egész kitevőre, osztó, többszörös, valódi osztó, prímszám, összetett szám, prímtényezős felbontás

Központi fogalmak: legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

Az óra legfontosabb elemei

Ezen az órán jobban elmélyedünk a prímtényezős felbontás vizsgálatában és így jutunk el a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmához. A fogalmakat a diákok változatos példaanyagon keresztül gyakorolják be, előkerülnek olyan szöveges feladatok is, amelyek számelméleti kérdésekre vezetnek.

	Idő	*Rövid leírás*	*Módszer*	*Segédeszköz*
1.	10 p	**Az előző óra feladatainak megbeszélése**	frontális megbeszélés	tábla, kréta
2.	15 p	**LNKO, LKKT fogalma**	frontális megbeszélés	tábla, kréta
3.	10 p	**Villámrandik**	egyéni és pármunka	táblázatok, számok
4.	8 p	**Feladatmegoldás**	egyéni vagy pármunka	feladatlap
5.	2 p	**Az óra lezárása**	tanári közlés	

Az óra előkészítése

Szükséges előkészületek:

1. **Villámrandi táblázatok és számok** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően.
   számelmélet_05_melléklet_táblázat

2. **LNKO, LKKT feladatlap nyomtatása** a csoport létszámának megfelelően.
   számelmélet_05_melléklet_feladatlap

Opcionális előkészületek:

3. Ha van lehetőség vetíteni, akkor hasznos lehet az **idő mérése látható formában**, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Az előző óra feladatainak megbeszélése (10 perc)

Módszertani megjegyzés

A tanár köszönti a diákokat, majd kiválasztja, hogy mely feladatokat szeretné megbeszélni az előző órán megkezdett feladatsorból. A 2. feladatot mindenképpen javasoljuk a továbblépéshez, de a tanár dönthet további feladatok megbeszélése mellett is az előző órai tapasztalatok alapján.

Nagyon hasznos, ha a megbeszélés alatt a diákok elsajátítják azt a gondolatot, hogy egy szám osztója egy másiknak, ha az osztó prímtényezői mind szerepelnek a másik prímtényezői között, legfeljebb akkora kitevővel, mint a másik számban. Megfordítva, többszöröst úgy kapunk, ha a prímtényezős felbontást új tényezőkkel egészítjük ki, vagy a meglévő tényezők kitevőjét növeljük.

2. A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös fogalma (15 perc)

Módszertani megjegyzés

A feladatok ellenőrzésével átismételtük, hogy a prímtényezős felbontásból milyen jól meg lehet állapítani, hogy mely számoknak mik az osztói. A következő feladat, mely már a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös felé mutat, szerves folytatása az eddigieknek. Miután a diákok megismerték a bevezető feladatot, rövid gondolkodási időt kapnak, a padtársak két különböző számmal számolnak. A feladat paramétereit a tanár a táblán is rögzítheti.

Tanár: Képzeljétek, a Budapesten lévő lakásom előtt van egy buszmegálló. A buszmegállóban megáll a 75-ös és a 105-ös busz is, amelyek egyenlő időközönként járnak. Reggel pontban 8-kor mindkettő megáll a ház előtt, a 75-ös 9:15-kor is, a 105-ös pedig 9:45-kor is jön.

Arra szeretnélek kérni, hogy számoljátok ki, hogy hány percenként járhat a 75-ös és a 105-ös busz, ha mindkettőről tudjuk, hogy egész percenként jön, mindig ugyanakkora időközönként. Az összes lehetőséget írjátok fel. A padtársak közül az ablak felőliek számolják a 75-ös buszt, az ajtó felőliek a 105-öst. Van két percetek átgondolni a válaszotokat, utána közösen beszélgetünk tovább.

Tanár: Lejárt az időtök, lássuk, mire jutottatok! Először mondja a válaszát olyasvalaki, aki a 75-ös busszal dolgozott.

Diák: 8:00-tól 9:15-ig 75 perc telik el, ahány percenként a 75-ös busz jár, az a szám biztosan a 75 osztója. Ezek pedig az 1, 3, 5, 15, 25, 75, tehát ennyi percenként járhat a 75-ös busz.

Tanár: Azt hadd kérdezzem meg, hogy mi alapján kerested az összes osztót!

Diák: Osztópárokat használtam.

Tanár: Nagyszerű! Van, aki esetleg prímtényezős felbontást is készített?

Módszertani megjegyzés

A tanár felírja a 75 prímtényezős felbontását ($75 = 3 \cdot 5^2$), majd beszélget a diákokkal arról, hogy hogyan olvashatóak le ebből az osztók. A szám osztóit a táblán rögzíti.

Tanár: Lássuk most a 105-ös buszt. Valaki, aki a 105-össel dolgozott, elmondja a megoldását?

Diák: Mivel 8:00 és 9:45 között 105 perc telik el, a 105 osztóit kellett keresni. Ezek a következők: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105, tehát ennyi percenként járhat a 105-ös.

Tanár: Nagyon ügyesen végigmondtad, írjuk fel azért a 105 prímtényezős felbontását is: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Módszertani megjegyzés

A tanár az utóbbit, valamint az osztókat is rögzíti a táblán.

Képzeljétek, van egy busz, a 175-ös, amelyik 8-kor, 9:15-kor és 9:45-kor is megáll a ház előtt. Mondjátok meg, hogy hány percenként járhat a 175-ös busz!

Diák: Tudjuk, hogy 75 perc múlva és 105 perc múlva is jön, tehát az a szám, ahány percenként a busz jön, osztója a 75-nek és a 105-nek is. Ennek a két számnak a közös osztói az 1, 3, 5 és 15, tehát a busz 1 percenként, 3 percenként, 5 percenként vagy 15 percenként jár.

Tanár: Nagyszerű! Tehát végeredményben két szám közös osztóit kellett megkeresni, ez adta a feladat megoldását.

Hogy lássuk, boldogultok-e egyedül egy hasonló feladattal, számoljátok végig az előzőeket abban az esetben, ha a busz a 8-as érkezés után 8:42-kor illetve 9:00-kor is megáll a megállóban. Hány percenként járhat ez a járat? Két percetek van kiszámolni.

A tanár két perc gondolkodási időt hagy, majd megbeszéli a csoporttal az eredményt, ami 1, 2 vagy 3 vagy 6 percenkénti időköz.

Módszertani megjegyzés

A tanár mérlegelje, hogy érdemes-e ezen a ponton belemenni abba, hogy a közös osztókat hogyan olvashatjuk le a prímtényezős felbontásokból.

Ha ezt mindenki megértette, akkor felvetek egy látszólag másik problémát. Kérlek mondjátok meg nekem, hogy mi mindennel lehet egyszerűsíteni ezt a törtet:

$$\frac{75}{105}$$

Diák: Hiszen ezt a feladatot az előbb oldottuk meg, a közös (1-től különböző) osztókkal lehet egyszerűsíteni, tehát 3-mal, 5-tel és 15-tel.

Tanár: És vajon mikor kapjuk a legegyszerűbb alakot, azaz azt, ami tovább már nem egyszerűsíthető?

Diák: Ha 15-tel egyszerűsítünk, mert akkor lesz a számláló és a nevező is a legkisebb.

Tanár: Kérek akkor most mindenkit, hogy végezze el egyedül a 15-tel egyszerűsítést, és ha megvan vele, végezze el azt törtes műveletet, amelyet mindjárt felírok a táblára.

Módszertani megjegyzés

A tanár felírja a következő műveletsort: $\frac{1}{105}+\frac{1}{75}=$ és körbemenve ellenőrzi, hogy ki hogyan boldogul. Két -három perc elteltével folytatódik a közös megbeszélés.

Ha szükségét érezzük, beszúrható ide egy buszokhoz kapcsolódó, a legkisebb közös többszörösre építő feladat is: Két buszjáratnak van egy közös megállója, az egyik 8 percenként, a másik 10 percenként jár. 8:00-kor mindkét járatnak érkezési időpontja van. Mikor jön 8:00 után legközelebb mind a két járat?

Tanár: Nos, beszéljük meg, mire jutottatok! Először is, mit kaptatok egyszerűsítés után?

Diák: $\frac{75}{105}=\frac{3\cdot 5^2}{3\cdot 5\cdot 7}=\frac{5}{7}$.

Tanár: Remek! És mire jutottatok a törtek összegével?

Diák: Először közös nevezőre hoztam, ami a $105\cdot 75=7875$, az első törtet 75-tel, a másodikat 105-tel bővítve kapjuk:

$$\frac{1}{105}+\frac{1}{75}=\frac{75}{7875}+\frac{105}{7875}=\frac{180}{7875}.$$

Tanár: Kifogástalan megoldást adtál. Egy dolgot azért gondoljunk végig, lehetett volna kisebb közös nevezővel számolni?

Ehhez figyeljünk a két nevező prímtényezős felbontására:

$$105=3\cdot 5\cdot 7,\qquad 75=3\cdot 5^2$$

Módszertani megjegyzés

A tanár ezeket egyből be is írja a nevezőkbe, ez is segíti a következő gondolatmenet követését.

$$\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 5^2}$$

Vajon milyen prímtényezőket kell mindenképpen beletennünk a közös nevezőbe, hogy a két számnak közös többszörösét kapjuk?

Diák: Kell bele 3-as, 5-ös és 7-es, ráadásul 5-ösből 2 db, hogy a 75-nek is többszöröse legyen.

Tanár: Tehát a $3\cdot 5^2\cdot 7=525$ megfelelő közös többszörös lesz. Meg tudjátok mondani, hogy ez a szám hányszorosa 75-nek és hányszorosa a 105-nek? Fókuszáljatok a prímtényezős felbontásra, az segít!

Diák: A 75-nek 7-szerese, mert az hiányzik a prímfelbontásból, a 105-nek pedig 5-szöröse.

Tanár: Nagyszerű, és ezzel azt is megállapítottuk, hogy melyik törtet mennyivel kell bővíteni a közös nevezőre hozás során:

$$\frac{1}{105}+\frac{1}{75}=\frac{5}{525}+\frac{7}{525}=\frac{12}{525}=\frac{4}{175}$$

Tekintsünk vissza kicsit az eddigi gondolatmenetre. Elmondható, hogy a törtes műveletek folyamán közös osztókat és közös többszörösöket kellett találnunk, a közös osztók között a legnagyobb, a közös többszörösök között a legkisebb volt a legpraktikusabb.

Módszertani megjegyzés

Az előző számításokban kihasználhatjuk az okosszámológépek adta lehetőségeket. Ha beütjük a $\frac{1}{105}+\frac{1}{75}$ műveletsort a gépbe, egyből az egyszerűsített alakot, $\frac{4}{175}$ -öt ad eredményül. Ez motivációul is szolgálhat, hogy megértsük, miért pont az lett a nevező, ami.

Most, hogy ezt ilyen szépen végiggondoltuk, vizsgáljunk két olyan számot, amelyekkel már múlt órán találkoztatok, és próbáljuk megállapítani a közös osztóik közül a legnagyobbat, a közös többszöröseik közül pedig a legkisebbet.

Módszertani megjegyzés

A tanár felírja az előző órai 2. feladat két számát a táblára:

$$A = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \qquad B = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13$$

Kis gondolkodási idő után folytatja:

Tanár: Vizsgáljuk először a közös osztókat. Először is milyen prímtényezők kerülhetnek bele?

Diák: A 2-es és 3-as biztosan.

Tanár: És más?

Diák: Más nemigen, mert nincs több közös tényező.

Tanár: Idáig remek! Már csak azt kell megmondani, hogy hány darab 2-est, és hány darab 3-ast tehetünk a közös osztóba.

Diák: A 2-esből legfeljebb hármat, különben nem lenne a B osztója, hasonlóan a 3-asból legfeljebb ötöt, hogy az A-nak is mindenképp osztója legyen. Így a legnagyobb közös osztó a $2^3 \cdot 3^5$.

Tanár: Parádés! Most térjünk rá a legkisebb közös többszörösre. No, ebbe milyen prímtényezőket kell beletenni?

Diák: Mindent, ami szerepel A-ban vagy B-ben.

Tanár: És darabszám szerint mennyit?

Diák: Most ahhoz, hogy mindkét számnak többszöröse legyen, szerepelnie kell minden prímtényezőnek.

Tanár: Valóban, tehát a két szám legkisebb közös többszöröse

$$2^4 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13$$

Módszertani megjegyzés

Az előző gondolatokat a tanár a csoport szintjéhez mérten fejti ki jobban vagy kevésbé, majd összegyűjti az eddigi tapasztalatokat a táblán:

Foglaljuk össze az eddigieket, írjuk is le a tapasztalatokat!

Az a és b pozitív egész számok

- **legnagyobb közös osztója** (LNKO) a közös osztók közül a legnagyobb.

  Jelölés: $(a; b)$

- **legkisebb közös többszöröse** (LKKT) a közös többszörösök közül a legkisebb.

  Jelölés: $[a; b]$

A legnagyobb közös osztó prímtényezős felbontása a közös prímtényezőket tartalmazza az előforduló (leg)kisebb kitevőn.

A legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontása a két számban előforduló összes

Tanár: Most, hogy összegyűjtöttük a legfontosabb tudnivalókat a legnagyobb közös osztóról és a legkisebb közös többszörösről, itt az ideje, hogy megnézzétek, egyedül mennyire boldogultok ezekkel a fogalmakkal.

3. Villámrandik (10 perc)

Tanár: A következő feladatattal gyakorolni fogjuk a megbeszélteket. Mindenki kap egy táblázatot és egy számot. Először is készítsd el a kapott szám prímtényezős felbontását és írd be a táblázat első cellájába. Utána keress egy párt és töltsétek ki közösen a táblázat első sorát. Ha elkészültetek, keress egy újabb párt, töltsétek ki közösen a következő sort, és így tovább.

Módszertani megjegyzések

Ha szükségesnek érezzük, mutassuk meg az első sor kitöltését egy példa segítségével.

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak.

Ha úgy érezzük, hogy a csoport valamilyen okból nem szívesen csinálná játékos formában a táblázatkitöltést, akkor elhagyhatjuk ezt a részt és több időt szánhatunk a feladatmegoldásra.

4. További gyakorló feladatok (8 perc)

Módszertani megjegyzések

Az óra maradék részében a mellékelt feladatlap feladatai között válogat a tanár a csoport felkészültsége alapján. Az 1. feladat d) részét mindenképp javasoljuk megbeszélésre illetve házi feladatnak, mert ennek kapcsán találkozhat a csoport a relatív prímek fogalmával. Mivel e fogalom középszintű anyag, a meghatározását rögzítsük a füzetbe:

Két (vagy több) egész szám akkor **relatív prím**, ha a legnagyobb közös osztójuk 1.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órát az előző órai feladatok megbeszélésével kezdtük, majd buszos példák segítségével megértettük a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmát. Ezeket utána alkalmaztuk is törtek egyszerűsítésére és közös nevezőre hozására, végül villámrandik (és egy feladatlap) keretében gyakoroltátok az elhangzottakat.

Javasolt házi feladatok

A tanár kijelöli, hogy a feladatlapról mely feladatokat fejezzék be a diákok házi feladat gyanánt. Az 1/abcd, 2, 3, 4, 5 feladatokat mindenképpen érdemes feladni rutinszerzés céljából (amennyiben az órán nem marad rá idő).

Módszertani megjegyzés

Ha a tanár szükségét érzi, a következő óra előtt érdemes beszúrni egy feladatmegoldó, gyakorló órát az eddigiek gyakorlására. Megoldandó feladatok lehetnek például az eddigi feladatsorok meg nem oldott példái.

Mellékletek

Villámrandi táblázatok és számok

számelmélet_05_melléklet_táblázat

LNKO, LKKT feladatlap

számelmélet_05_melléklet_feladatlap

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

számelmélet_05_melléklet_táblázatos óravázlat