IV. óra: A számok anatómiája

Az óra célja: A prímtényezős felbontás elkészítése; osztók és többszörösök leolvasása a prímtényezős felbontásról.

Előzetes tudás: hatványozás egész kitevőre, osztó, többszörös, valódi osztó, prímszám, összetett szám

Központi fogalmak: prímtényezős felbontás

Az óra legfontosabb elemei

Múlt órán a prímszámokat vizsgáltuk hosszasan, ezen az órán az összetett számokkal fogunk foglalkozni, illetve azzal, hogy hogyan építhetők fel prímszámokból. Nagyon fontosnak véljük, hogy megmutassuk, hogy a szám „működése" oszthatóság szempontjából sokkal inkább múlik a prímfelbontás struktúráján, mint a konkrét prímtényezőkön.

Az óra első harmadában az Osztójáték elemzése a szemlélethez járul hozzá, az óra további része viszont egy konkrét algoritmust, a prímtényezős felbontás készítését magyarázza el és gyakoroltatja be. A feladatmegoldás különböző példákon keresztül mutat rá, hogy miért praktikus módszer prímtényezős felbontást készíteni oszthatósági kérdéseket vizsgálva.

	Idő	*Rövid leírás*	*Módszer*	*Segédeszköz*
1.	15 p	**Osztójáték a tanár ellen és a játék elemzése**	frontális megbeszélés	Osztójáték leírása
2.	15 p	**Prímtényezős felbontás**	frontális megbeszélés, egyéni munka	tábla, kréta
3.	13 p	**Feladatmegoldás**	egyéni munka vagy pármunka	feladatlap
4.	2 p	**Az óra lezárása**	tanári közlés	

Az óra előkészítése

Szükséges előkészületek:

1. Az órához tartozó **feladatlap** nyomtatása.
   számelmélet_04_melléklet_feladatlap

Opcionális előkészületek:

2. **Prezentáció** az Osztójáték szabályaival.
   Osztójáték szabályai
3. Ha van lehetőség vetíteni, akkor hasznos lehet az **idő mérése látható formában**, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Osztójáték a tanár ellen és a játék elemzése (15 perc)

Módszertani megjegyzés

A tanár köszönti a diákokat, majd pár percben átismétli velük a prímszámokról tanultakat. Igény esetén bátran térjen vissza egy-egy olyan feladatra az előző órai feladatlapról, amelynek megbeszélését hasznosnak ítéli.

Ezek után felvezeti az Osztójáték újabb fordulóját, amelyben a diákoknak ellene kell vitézkedniük. A mondandójában az irónia mennyiségét alakítsa személyisége szerint.

Tanár: Az elmúlt órákon már nagyon profik lettetek az Osztójátékból. Azt is láttátok, hogy különböző alapszámok esetén különböző bonyolultságú a játék, bizonyosoknál egészen egyszerű, bizonyosoknál pedig jóval bonyolultabb.

Arra is kértelek titeket korábban, hogy keressetek olyan alapszámokat, amelyek esetén biztosan győzni tudtok, ha eldönthetitek, hogy kezdtek, vagy másodikok vagytok. Most eljött az alkalom, hogy jól tönkreverjétek szegény tanárotokat Osztójátékban. Ennek a menetrendje a következő lesz:

- Valaki, akinek van olyan alapszáma, amivel nyerni tud, jelentkezik és közli az általa választott alapszámot.
- Kijön a táblához és megmondja, hogy kezdeni akar, vagy második akar lenni.
- Lejátszik velem egy játékot, a többiek pedig izgatottan várják, hogyan szenvedek megszégyenítő vereséget.

Annyit szeretnék kérni, hogy próbáljatok a minél egyszerűbb, könnyebben átlátható nyerő alapszámoktól haladni a bonyolultabbak felé.

Módszertani megjegyzés

Ezután kezdetét veszi a játék, sorban szólítjuk ki a diákokat és próbáljuk rendszerezni is a tapasztalatokat.

A **legfontosabb tapasztalatok** és a tapasztalatok összegzésének egy lehetséges módja az **Osztójáték leírása** c. dokumentumban találhatóak.

2. Prímtényezős felbontás (15 perc)

Tanár: Az előzőekben azt láttuk, hogy az Osztójátékban a nyerő stratégiát az határozta meg, hogy a számnak milyen a szerkezete, felépítése.

Hogy mit tartunk egy szám jellemzőinek, az valószínűleg kisgyerekkorunktól kezdve sokat változott. A szám jellemzőjének tartottuk a nagyságot, meg azt, hogy milyen számjegyek alkotják. Ezek az oszthatóság és különösen az Osztójáték szempontjából nem igazán lényeges tulajdonságok. Lényeges viszont az, hogy milyen prímek szorzataként áll elő, és hogy melyikből hány darab van. Tudjátok-e, hogyan nevezzük a számoknak azt az alakját, amit prímszámok szorzataként adunk meg?

Diák: Prímtényezős felbontás.

Tanár: Igen. És emlékeztek-e, hogyan kell elkészíteni? Csináljuk meg közösen a 90 prímtényezős felbontását!

Diákok: Felírjuk a 90-et, majd húzunk mellé egy függőleges vonalat.

90	

Utána keresünk egy prímosztót. Például a 2 alkalmas, hiszen a 90 páros. A 2-t leírjuk a 90 mellé a jobb oldalra, majd elosztjuk vele a 90-et és az eredményt, a 45-öt leírjuk a 90 alá.

90	2
45	

Utána a 45-tel folytatjuk tovább. Keresünk egy prímosztót. Például a 45 osztható 5-tel, felírjuk a 45 mellé jobb oldalra az 5-öt, elosztjuk vele a 45-öt és az eredményt felírjuk a 45 alá.

90	2
45	5
9	

Utána a 9-cel folytatjuk. Az eljárást egészen addig csináljuk, amíg az osztás után 1-et nem kapunk.

90	2
45	5
9	3
3	3
1	

Ekkor a jobb oldalon szereplő számok szorzata lesz a 90 prímtényezős felbontása:

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Tanár: Mindenkinek érthető az eljárás? Csináljátok meg a 720 prímtényezős felbontását!

720	2
360	3
120	2
60	2
30	3
10	2
5	5
1	

Módszertani megjegyzés

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak. A végén kérjünk meg egy diákot, hogy írja fel a megoldását.

Ha a csoport színvonala olyan, a példánk nyugodtan lehet nagyobb, pl. 12 600.

Tanár: Mindenki pontosan ugyanezt írta fel?

Diák: Nálam más sorrendben szerepelnek a prímek.

Tanár: Hogy lehet az?

Diák: Előbb jutott eszembe, hogy a 360 osztható 2-vel, mint az, hogy osztható 3-mal.

Tanár: És ez gond?

Diák: Nem, a végén ugyanazokat a szorzótényezőket kaptam, csak más sorrendben.

Tanár: Lehet annak előnye, ha valaki előbb egy nagyobb prímosztót talál meg?

Diák: Kisebb számmal dolgozhatunk az osztás után.

Tanár: És szól amellett is érv, hogy előbb a kisebb osztókat keressük meg?

Diák: Így talán szisztematikusabban tudunk haladni. És kisebb számmal talán könnyebb osztani.

Tanár: Igen, mindkettő mellett lehet érvelni, nincs jobb, vagy rosszabb módszer.

Előfordulhat-e az, hogy az eljárás elvégzése során valaki más prímszámokat kap a jobb oldalon? Például megjelenhet ott a 13?

Diák: Szerintem nem, mert csak olyan prímszámok jelenhetnek meg, amikkel a 720 osztható. Márpedig a 720 nem osztható 13-mal.

Tanár: Lehet, hogy a 720 nem osztható 13-mal, de nem lehet, hogy valamelyik osztója osztható vele, csak jó sorrendben kell rábukkanni?

Diák: Ha valamelyik osztója a 13 többszöröse lenne, akkor a 720 is a 13 többszöröse lenne…

Tanár: Rendben, tehát nem kaphatunk a táblákon szereplő prímszámoktól eltérő prímeket a jobb oldalon. És az sem fordulhat elő, hogy valaki a táblán szereplő 1 db 5-ös helyett több vagy kevesebb 5-öst kap? Például nem kaphat valaki 2 db 5-öst?

Diák: 2 db 5-ös szorzata 25. Ha ez szerepelne a felbontásban, az azt jelentené, hogy a 720 osztható 25-tel, pedig ez nem igaz.

Tanár: Foglaljuk össze a lényeget. A megbeszélt eljárás mindig ugyanazokat a prímeket adja ugyanabban a mennyiségben, csak a sorrendben lehet eltérés. Ezt úgy is mondjuk, hogy a prímtényezős felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Írjuk fel tehát a 720 prímtényezős felbontását:

$$720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Lehetne-ez ezt valahogyan rövidebben írni?

Diák: Az azonos tényezők esetén használhatnánk hatványalakot.

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Módszertani megjegyzés

Érdemes lehet megmutatni, hogy bizonyos számológépek meg tudják adni a prímtényezős felbontást.

Tanár: Alaposan megbeszéltük, hogyan kell elkészíteni a prímtényezős felbontást. De miért előnyös ez az alak? Mit tudunk róla leolvasni? Mondjatok olyan számokat, amivel osztható a 720.

Diák: Például jól látszik, hogy a 720 osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel.

Tanár: Tehát látjuk a prímosztókat. Más osztókat is le tudunk olvasni? Például látható ebből, hogy a 720 osztható 9-cel?

Diák: Igen, mert szerepel a tényezők között a 3^2, ami pont 9.

Tanár: És az is látszik, hogy hányszor van meg benne?

Diák: Igen, éppen $2^4 \cdot 5 = 80$-szor.

Tanár: És hogyan lehetne ellenőrizni, hogy a 720 osztható-e 90-nel?

Diák: Láttuk, hogy $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Azt kell ellenőrizni, hogy szerepelnek-e ezek a 720 prímtényezős felbontásában. Szerepelnek, tehát osztható vele.

Tanár: Nagyon jó. Általában mi igaz a 720 osztóira?

Diák: A 720 prímtényezőiből építhetők fel. Mindegyik prímtényező legfeljebb annyiszor szerepelhet egy osztóban, ahányszor a 720-ban, azaz a 2 legfeljebb 4-szer, a 3 legfeljebb 2-szer, az 5 legfeljebb 1-szer.

Tanár: A prímtényezős felbontás alapján tehát könnyen meg tudjuk mondani egy szám osztóit.

3. Feladatmegoldás (13 perc)

Módszertani megjegyzések

Ennek az órarésznek a célja a prímtényezős felbontás begyakorlása páros munkában. Fontosnak tartjuk az előismeretek különbözősége miatt, hogy az eltérő szinten álló és különböző előismerettel rendelkező diákok ne ugyanazokat a feladatokat csinálják. Ezt lehetővé teszi a feladatsor felépítése is, az első négy feladat eljárásokat és fogalmakat gyakoroltat, a következők viszont az osztók számára próbálják rávezetni a tanulókat.

Hogy a differenciálás megvalósulhasson, a tanulópárokat is tudásszintjük szerint alakítsuk ki: olyan diákok alkossanak párokat, akik a témában nagyjából egyformán jártasak, ügyesek. Jónak tartjuk, ha a diákok dönthetnek róla, hogy ők az alapozó, vagy a nehezebb feladatokkal foglalkoznának inkább, az ilyen döntések segíthetik őket abban, hogy a saját tudásszintjüket megtanulják helyesen felmérni.

A feladatok megbeszélésére a következő óra elején kerül sor.

Tanár: Párokban fogtok dolgozni, a prímtényezős felbontáshoz kötődő feladatokat fogtok megoldani. Ti választhattok a feladatokból az alábbiak szerint:

1. a feladatlap első oldala, az első négy feladat a prímtényezős felbontás elkészítését, az osztók és többszörösök leolvasását gyakoroltatja – ez a középszintű érettségi szintje, ezeket a feladatokat mindenkinek meg kell tudni oldani;
2. a feladatlap második oldala rávezet arra, hogyan lehet leolvasni egy szám osztóinak számát a prímtényezős felbontásáról, ezzel azoknak érdemes foglalkozni, akik magabiztosak a prímtényezős felbontás elkészítésében;
3. a csillagos feladatok nehezebbek, ezek több ötletet kívánnak, aki a középszintű ismeretek magabiztos elsajátítására hajt, az ezeket nyugodtan átugorhatja.

4. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órát azzal kezdtük, hogy ellenem játszottatok Osztójátékot, majd megbeszéltük a lejátszott játékok tapasztalatait. Ezután felelevenítettük a prímtényezős felbontás fogalmát és gyakoroltuk is konkrét számok felbontását. A párban elvégzett feladatokat a következő órán fogjuk megbeszélni.

Javasolt házi feladatok

A tanár kijelöli, hogy a feladatlapról mely feladatokat fejezzék be a diákok házi feladat gyanánt. Célszerű a folytatás szempontjából, ha **a feladatlap 2. feladatának** mindenki a végére ér a következő tanóra elejéig.

Mellékletek

Feladatlap

számelmélet_04_melléklet_feladatlap

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

számelmélet_04_melléklet_táblázatos óravázlat