III. óra: Príma prímek

Az óra célja: Az osztógrafikon további tulajdonságainak megfigyelése, prímszám és összetett szám fogalmának körüljárása.

Előzetes tudás: osztó, valódi osztó, lineáris függvény, négyzetgyökfüggvény

Központi fogalmak: prímszám, összetett szám

Az óra legfontosabb elemei

Ezen az órán szeretnénk kicsit jobban megérteni az előző órán megkezdett osztógrafikont. Ez a grafikon új megvilágításba helyezi az osztópárokat, elvezet a prímszámok és az összetett számok fogalmához. Az óra utolsó harmadában a diákok megismerkednek annak bizonyításával, hogy végtelen sok prímszám van.

	Idő	***Rövid leírás***	***Módszer***	***Segédeszköz***
1.	5 p	**Bemelegítő teszt**	pármunka	prezentáció (1. dia)
2.	15 p	**Az osztógrafikon elemzése**	frontális megbeszélés	prezentáció (2. dia)
3.	15 p	**Feladatmegoldás**	egyéni munka vagy pármunka	feladatlap
4.	8 p	**Végtelen sok prímszám van**	pármunka	bizonyítás lépései felvágva
5.	2 p	**Az óra lezárása**	tanári közlés	

Az óra előkészítése

Szükséges előkészületek:

1. A bemelegítő tesztet és az osztógrafikont tartalmazó **prezentáció**.
   számelmélet_03_melléklet_osztógrafikon
2. **Prímszámok és összetett számok feladatlap** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően.
   számelmélet_03_melléklet_feladatlap
3. **A bizonyítás lépései**nek kinyomtatása és felvágása annyi példányban, ahány pár van a csoportban
   számelmélet_03_melléklet_bizonyítás

Opcionális előkészületek:

4. Ha van lehetőség **vetíteni,** akkor hasznos lehet az **idő mérése látható formában**, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.
5. Az osztógrafikon geogebráinak kivetítése:
   https://www.geogebra.org/classic/huz3wnma (képként a prezentációban is látjuk)
   https://www.geogebra.org/m/wn9dtpc6

Az óra felépítése

1. Bemelegítő teszt (5 perc)

Tanár: Mielőtt nagyon belelendülnénk a munkába, szedjük össze gyorsan, mi mindent csináltunk az elmúlt órán! Nyugodtan nézhetitek hozzá a füzeteteket.

Diák1: Játszottunk!

Diák2: Továbbá megbeszéltük, hogy egy szám osztóit hogyan lehet összegyűjteni az osztópárok segítségével.

Diák3: És elkezdtük megrajzolni azt a fura grafikont.

Tanár: Ennyi emlékeztető pont elég is lesz kiindulásnak, hogy mi is az a „fura grafikon”, ahhoz még visszatérünk. A következőkben néhány kérdést láthattok kivetítve, mindegyikre igen vagy nem a válasz. A padtársatokkal próbáljátok megválaszolni őket, a válaszotokat igyekezzétek megindokolni, 2-3 percetek van rá összesen.

Módszertani megjegyzés

A múlt órán vagy otthon befejezett osztógrafikon rengeteg lehetőséget tartogat. Az óra első negyedórájában ezt szeretnénk minél jobban kiaknázni, ehhez segítséget jelenthet, ha a grafikont ki is vetítjük:

https://www.geogebra.org/classic/huz3wnma

A grafikon előtt azonban néhány kérdést teszünk fel a diákoknak, amely a munkába rázódásukat segíti.

A tanár bátran mérlegelje, hogy a grafikont milyen mélységben vizsgálja a csoporttal.

Módszertani megjegyzés

A tanár kivetíti a kérdéseket, amelyek a következők:

1. Minden 5-tel osztható számnak páros darabszámú osztója van.
2. Az osztógrafikon azt a függvényt ábrázolja, amely minden számhoz hozzárendeli az osztóit.
3. Minél nagyobb egy szám, annál több osztója van.

2. Az osztógrafikon elemzése (15 perc)

Módszertani megjegyzés

Az idő letelte után a tanár végigmegy a kérdéseken és a diákok kézfeltartással jelzik, hogy szerintük igaz vagy hamis a helyes válasz.

Tanár: Nézzük az **első kérdést**, van, aki igazra szavazott? Hogyan gondolkodott?

Diák: Megnéztem 5-re, annak kettő darab van, 10-re és 15-re 4 darab, 20-ra 6 darab. Ez alapján biztos mindig páros darabszámú van.

Tanár: És aki szerint hamis, az hogyan gondolkodott?

Diák: Találtam ellenpéldát, a 25-nek éppen három osztója van, az 1, az 5 és a 25.

Tanár: Látjátok, ezért nem szabad túl hamar általános következtetéseket levonni. Van itt azonban még valami. Múlt órán tanultuk, hogy egy szám osztóit célszerű páronként keresni. Soroljátok fel nekem gyorsan a 30 osztópárjait!

Diák: 1 és 30, 2 és 15, 3 és 10, 5 és 6.

Tanár: Remekül elmondátok. És akkor miért nem igaz a következő: egy 1-nél nagyobb szám minden osztójának van párja, tehát az 1-nél nagyobb természetes számoknak páros darabszámú osztója kell legyen. Nincs itt valami furcsaság?

Diák: A hiba ott van, hogy lehetnek olyan osztók, amelyek önmaguk párjai, például a 25 esetén az 5 önmaga párja.

Tanár: Remek észrevételt tettél. Később visszatérünk még erre, most viszont annyit újra megjegyzünk, hogy lehet olyan osztó, ami önmaga párja. Térjünk rá a **második kérdés**re. Ki szerint igaz, ki szerint hamis?

Diák: Az állítás hamis, mert ez a hozzárendelés nem függvény, egy számhoz több különböző értéket rendelünk.

Tanár: Na és a **harmadik**? Ki szerint igaz, ki szerint hamis?

Diák: Hamis, hiszen például a 12-nek van 6 db osztója, viszont a nála nagyobb 13-nak csak 2 darab.

Módszertani megjegyzés

A tanár ezen a ponton tovább lép a következő diára, amelyen az osztógrafikon látható.

Tanár: Maradjunk még egy pillanatra a 3. kérdésnél, mi a hiba a következő érveléssel: Ha ránézek az osztógrafikonra, akkor jobbra menve általában egyre több pöttyöt látok, tehát egyre nagyobb számoknak egyre több osztójuk van.

Diák: Az állítás azt mondja, hogy mindig több osztója van egy nagyobb számnak. Amire a tanár úr/tanárnő utal, az meg az, hogy nagyobb számoknak sok esetben több osztójuk van, mint a kisebbeknek. De nem mindig, mint azt a 12 és 13 esete mutatja.

Tanár: Nagyon fontos dolgot mondtál, ami az egész témának egy kulcskérdése, és számtalan olyan problémához vezet, amelyeknek a mai napig sem ismerik a megoldását a matematikusok.

Ebben a diagramban egyszerre látszanak szabályosságok és szabálytalanságok, úgy tűnik, mintha az osztók mennyisége általánosságban egyre növekedne, aztán újra és újra jönnek olyan számok, amelyekhez csak két pöttyöt rajzolunk, ilyenek például a 17 és a 23.

Tudja valaki egyébként, hogy hogy hívjuk azokat a számokat, amelyekhez csak két pöttyöt rajzoltam, tehát csak két pozitív osztójuk van?

Diák: Prímszámoknak!

Tanár: És amelyiknek több osztója van?

Diák: Összetett számoknak!

Tanár: A grafikonon tehát a prímek a „kétpöttyösök” az összetettek a „legalább 3 pöttyösök”. És melyek az „egypöttyösök”?

Diák: Csak az 1 az egypöttyös, minden nagyobb számnak van legalább két osztója, 1 és önmaga.

Tanár: Bizony. A grafikon is azt mutatja, hogy az 1 egész másképp működik osztók szempontjából, mint az összes többi pozitív egész, ezért ő sem nem prím, sem nem összetett. Ezeket írjuk is fel a füzetbe.

A **prímszám** olyan természetes szám, melynek pontosan két osztója van (1 és önmaga).

Az **összetett szám** olyan természetes szám, melynek kettőnél több osztója van.

Az **1** nem prím és nem is összetett szám.

Tanár: Az ábránkon elég sok olyat látunk, amikor újra és újra „kétpöttyös számok", tehát prímszámok kerülnek elő. Jó kérdés például, hogy ezek egy idő után elfogynak-e. Fogunk még ezzel is foglalkozni.

Most viszont arra térjünk rá, hogy milyen szabályosságok vannak ebben a grafikonban. Tudtok erre példákat mondani? Elkezdtünk múlt órán olyan egyenesekről beszélni, amelyekre nagyon sok pont illeszkedik, induljunk el ezen a nyomon. Hol láthatunk ilyen egyeneseket?

Diák: Itt vannak például sorban vízszintes egyenesek $y = 1$-nél, $y = 2$-nél, $y = 3$-nál, stb.

Tanár: Mit jelentenek az $y = 1$ egyenesen lévő pontok?

Diák: Azt, hogy az 1 minden pozitív egész számnak osztója.

Tanár: És az $y = 2$ egyenesen lévők?

Diák: Az pedig azt mutatja, hogy a páros számok mind oszthatók 2-vel, az $y = 3$ pontjai pedig azt, hogy a 3, a 6, a 9, stb mind oszthatóak 3-mal.

Módszertani megjegyzés

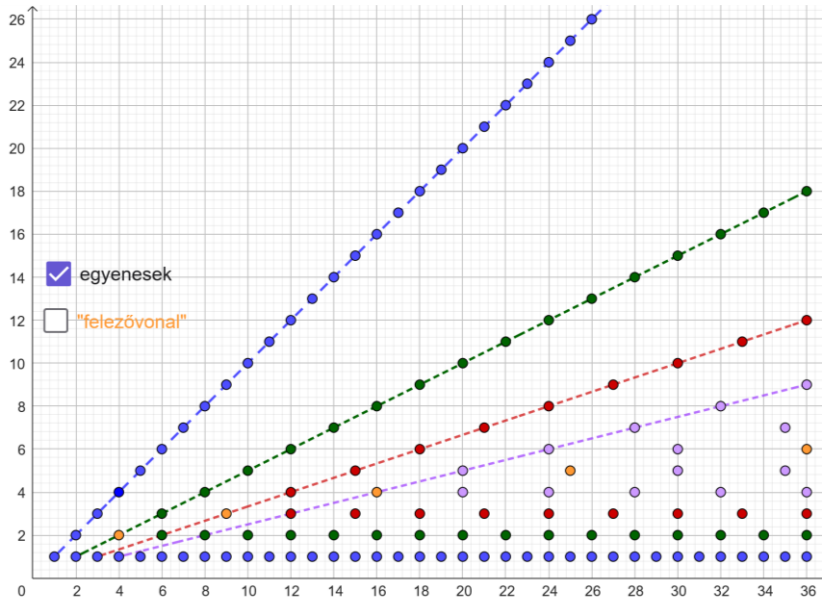
A tanár a csoport előismereteitől függően döntse el, hogy a szóban forgó egyenesekre úgy hivatkozik, mint az $f(x) = 2$ függvény grafikonja, vagy mint az $y = 2$ egyenletű egyenes.

Tanár: Szuper, egyben azt is megértettük, hogy miért lépegetünk az $y = 1$ egyenesen egyesével, az $y = 2$ -n kettesével, az $y = 3$-on hármasával.

Vannak azonban olyan egyenesek is, amelyek nem vízszintesek, mégis elég sok pont illeszkedik rájuk. Mutattok erre példát? Jöjjön ki valaki a táblához, és mutasson néhány ilyen egyenest!

Módszertani megjegyzés

A tanár kihív valakit, aki megmutatja az ábrán kirajzolódó „ferde" egyeneseket, tehát az $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$ és $y = \frac{1}{3}x$ képlethez tartozókat, majd lépteti a diát.



Tanár: Próbáljuk megérteni ezeknek az egyeneseknek a jelentését. Mit jelent a sok pont az első, kék színű egyenesen?

Diák: Azt, hogy minden szám osztója saját magának.

Tanár: Na, és a zöld? Lássuk csak, ezen az egyenesen az $x = 2$-höz tartozik az $y = 1$, az $x = 4$-hez az $y = 2$, a 6-hoz a 3, 8-hoz a 4, stb.

Diák: Akkor ez azt jelenti, hogy minden második számot megfelezve osztót kapunk?

Tanár: Bravó, és akkor talán arra is rájöttél, hogy a piros egyenesen lévő pontok mit jelölnek.

Diák: Ezen az egyenesen azt látjuk, hogy 3-nak osztója az 1, a 6-nak a 2, a 9-nek a 3. Tehát minden harmadik szám harmada megjelenik az osztók között.

Tanár: Már csak egy dolgot lenne jó megérteni, mégpedig azt, hogy mi is lehet ez a „felezővonal” felirat. Ehhez először arra válaszoljatok, kérlek, hogy mi lehet a színezés jelentése ebben az ábrában. Találtok ebben bármi szabályszerűséget? Kérlek, most függőlegesen próbáljatok keresgélni.

Diák: Az összetartozó osztópárok mindig egyszínűek.

Tanár: És akkor mi lehet a felezővonal?

Diák: Valami olyan vonal, ami az osztópár tagjait elválasztja egymástól.

Tanár: És amelyik osztó önmaga a párja, ahogy ezt például a 25-nél láttuk, azt hogyan válasszuk el önmagától?

Diák: Gondolom azok a pöttyök rajta lesznek ezen a felezővonalon.

Tanár: Nagyon jól mondod! Nézzük csak, miknek a párjai önmaguk? A 4-nél a 2-nek, a 9-nél a 3-nak, a 16-nál a 4-nek, a 25-nél az 5-nek. Láttok valamilyen szabályt?

Diák: Mindig a gyöke?

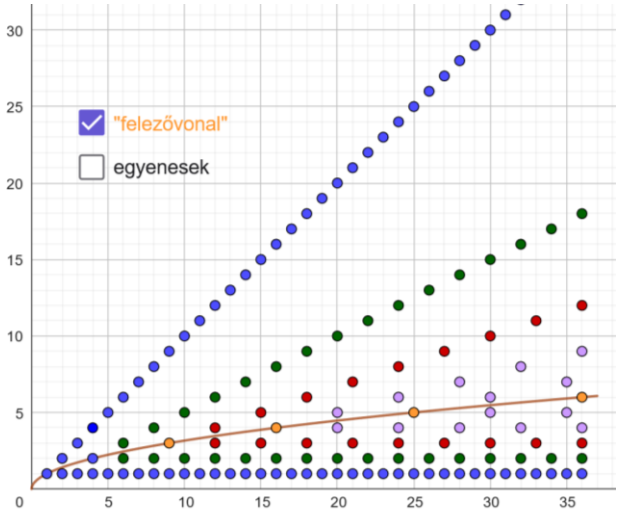
Tanár: Tudjuk ezt picit pontosítani?

Diák: Amelyik számból tudunk gyököt vonni, ott a gyök önmaga párja lesz.

Tanár: Egészen remek, még egy picit pontosítok, a 8-ból is tudok gyököt vonni, de $\sqrt{8}$ nem osztó, fontos, hogy a gyök egész legyen. De a lényegre térve, rajzoljuk be az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját, lássuk, mi történik.

Módszertani megjegyzés

A tanár bepipálja a megfelelő jelölőnégyzetet.



Tanár: Most, hogy ennyi mindenre fény derült, még arra hadd hívjam fel a figyelmeteket, hogy az ábrán nagyon szemléletesen látszik az, amiről már múlt órán tanultunk. Arra gondolok, hogy az osztópár egyik tagja mindenképpen legfeljebb az eredeti szám gyöke, tehát ha az osztókat párosával keressük, elég a szám gyökéig elmennünk.

Módszertani megjegyzés

Lehetőség van arra is, hogy tovább kivetítsük a diagramot (színek nélkül):

https://www.geogebra.org/m/wn9dtpc6

3. Feladatmegoldás (15 perc)

Módszertani megjegyzés

A tanár kiosztja a külön fájlban található feladatsort.

Tanár: Most, hogy tisztáztuk a prímszám és az összetett szám fogalmát, kaptok egy ezekkel kapcsolatos feladatlapot. Próbáljatok a feladatok közül minél többet megoldani! Dolgozhattok egyedül vagy párban, 15 percetek van a munkára.

Módszertani megjegyzés

Sétáljunk körbe, nézzük, hogyan haladnak a diákok. Ellenőrizzük az eredményeiket, jelezzünk vissza. Hallgassuk meg a megoldási ötleteiket. Ha szükségesnek érezzük bizonyos feladatokat közösen is megbeszélhetünk.

Akik elkészültek a feladatlappal, játszhatnak Osztójátékot általuk választott számokkal.

4. Végtelen sok prímszám van (8 perc)

Tanár: Szerepelt a feladatlapon egy interneten keresgélős kérdés: Hány jegyű a legnagyobb prímszám? Kicsit gonosz kérdés volt. Miért?

Diák: Mert nem volt elég pontos.

Tanár: Ezt hogy érted?

Diák: A legnagyobb prímet nem tudjuk megadni, csak azt, hogy mi a legnagyobb jelenleg ismert prím.

Tanár: Miért?

Diák: Mert lehet, hogy később találnak nagyobbat.

Tanár: De biztosan létezik nagyobb?

Diák: Szerintem igen. Az osztógrafikon vizsgálatakor is láttuk, hogy újra és újra felbukkannak prímek.

Tanár: Te mit gondolsz a legnagyobb prímszámról?

Diák: Hogy nem létezik ilyen, mert végtelen sok prím van.

Tanár: Megfogalmaztál egy olyan sejtést, hogy végtelen sok prímszám van. Ezt fogjátok most párokban bebizonyítani. Leírtam a bizonyítást egy lapra, amit aztán felvágtam mondatokra. Kiosztom nektek ezeket a mondatokat. Osszátok el őket egymás között és próbáljátok meg sorba állítani őket, összerakni a helyes gondolatmenetet. A munka során mindenki csak a saját mondatait mozgathatja.

Módszertani megjegyzés

A párok lehetnek az egymás mellett ülő tanulók, de dolgozhatunk véletlenszerű párokkal is, ehhez használhatjuk például a https://flippity.net/ „Random name picker” alkalmazását. Ha páratlan számú diákunk van, akkor az egyik csoport lehet háromfős.

A tétel bizonyítási lépéseinek sorbarakása nem csak logikus gondolkodást igényel, de a szövegértési és szociális kompetenciákat is fejleszti. Azért fontos, hogy mindenki a saját mondatait mozgassa, hogy lehetőleg a pár mindkét tagja kivegye a részét a feladatmegoldásból.

Jól együttműködő csoportokban a feladat nehezíthető azzal, hogy nem beszélhetnek közben.

Járjunk körbe, segítsünk az elakadó pároknak. A kész munka könnyen ellenőrizhető: A bal oldali betűk összeolvasásával az „Euklidész Elemek” szókapcsolatot kapjuk. A közölt bizonyítás már ebben a műben is olvasható volt!

Akik elkészültek, még játszhatnak Osztójátékot általuk választott számokkal, ha marad rá idő.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán elemeztük az osztógrafikont, megbeszéltük a prímszám és az összetett szám fogalmát, és bebizonyítottuk, hogy végtelen sok prímszám van.

Javasolt házi feladatok:

1. Az órai feladatlap befejezése.

Magyarázat: A feladatok átvezetnek a prímszámoktól a prímtényezős felbontásig, ami a következő óra témája lesz. (Az utolsó feladat segítség a múlt órán adott fejtörő megoldásához.)

2. Keressetek további olyan számokat, amelyekkel biztosan győzni tudtok az Osztójátékban! Ti dönthetitek el, hogy kezdeni szeretnétek, vagy átadjátok a kezdés jogát.

Magyarázat: Haladni szeretnénk azon felismerés felé, hogy a játék lefolyása a prímtényezős felbontáson múlik.

3. Az alábbi linken egy érdekes animációt látsz:

http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

Próbáld megfogalmazni, hogy mi látható ezen az animáción, tapasztalataidat írd le, tegyél minél több megállapítást!

Magyarázat: Az animáció segítségével értékes megállapítások tehetők prímszámokról és összetett számokról, azok felbontásáról.

Módszertani megjegyzés

Ez a feladat rendkívül alkalmas arra, hogy beadandó feladat legyen, amelyből akár jutalompontot is szerezhetnek a diákok. Az animáció megértésének mélysége nagyon változó lehet, emiatt mindenki a maga tudásszintjéhez mérten tud róla különböző mélységű megállapításokat tenni.

Mellékletek

A bemelegítő tesztet és az osztógrafikont tartalmazó prezentáció

számelmélet_03_melléklet_osztógrafikon

Prímszámok és összetett számok feladatlap

számelmélet_03_melléklet_feladatlap

Bizonyítás

számelmélet_03_melléklet_bizonyítás

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

számelmélet_03_melléklet_táblázatos óravázlat