II. óra: Keressünk osztókat!

Az óra célja: Osztók keresése osztópárok módszerével, osztók eloszlásának vizsgálata az osztógrafikon segítségével.

Előzetes tudás: fordított arányosság, négyzetgyökvonás, hozzárendelés, függvény

Központi fogalmak: osztó, valódi osztó, osztópár

Az óra legfontosabb elemei

Ezen az órán osztókat keresünk az osztópárok módszerével. Elkészítjük az osztók eloszlását mutató grafikont, amelyet a következő órán fogunk részletesen elemezni. Végül folytatjuk az Osztójátékot.

	Idő	*Rövid leírás*	*Módszer*	*Segédeszköz*
1.	5 p	**Bemelegítés**	egyéni munka	
2.	15 p	**Osztók keresése az osztópárok módszerével**	frontális megbeszélés	tábla, kréta
3.	15 p	**Az osztógrafikon elkészítése**	frontális megbeszélés, egyéni munka	tábla, kréta
4.	8 p	**Osztójáték**	pármunka	prezentáció, üres lapok
5.	2 p	**Az óra lezárása**	tanári közlés	

Az óra előkészítése

Opcionális előkészületek:

1. **Prezentáció az Osztójáték szabályaival**
   Osztójáték szabályai
2. **Üres lapok** az Osztójátékhoz. (Játszhatják a füzetükben is.)
3. Ha van lehetőség vetíteni, akkor hasznos lehet az **idő mérése látható formában**, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Bemelegítés (5 perc)

Tanári közlés: A múlt órán megismerkedtünk az **osztó,** a **többszörös** és a **maradék** fogalmával. Ismétlésként nézzünk néhány példát. Legyen a 120 az a szám, amit vizsgálunk. Mindenki írjon fel a füzetébe három mondatot, amelyben használja ezeket a szakkifejezéseket a 120-szal kapcsolatban.

Módszertani megjegyzések

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak. Akik hamarabb elkészülnek, írhatnak további mondatokat.

2. Osztók keresése az osztópárok módszerével (15 perc)

Tanár: Halljunk néhányat a felírt mondatokból! Mindenki mondjon egyet, de ügyeljetek rá, hogy ugyanaz ne hangozzon el többször.

Diákok: (példák)

- A 2 osztója a 120-nak.
- A 120 többszöröse a 6-nak.
- A 120 1 maradékot ad 7-tel osztva.
- A 120 osztója a 360-nak.
- A 120 000 többszöröse a 120-nak.
- A 125 5 maradékot ad 120-szal osztva.

Módszertani megjegyzések

Kérdezzünk rá az egyes mondatokra, hogy honnan tudják. (Például a 120 osztható 2-vel, mert $120 = 2 \cdot 60$.) A hibás mondatokat javítsuk ki közösen.

Miközben mondják a mondatokat, írjuk fel a 120 említett osztóit.

Tanár: Nagyon ügyesek vagytok, jól használtátok a szakkifejezéseket. A mondataitok alapján felírtam a 120 néhány osztóját. Megtaláltuk az összeset? Hogyan kellene ezt ellenőrizni?

Diák: Érdemes lenne nagyság szerint rendezni őket.

Tanár: Nagyon jó. Mivel kezdjük?

Diák: Az 1-gyel, mert azzal minden szám osztható.

Tanár: Miért?

Diák: Mert $120 = 1 \cdot 120$. (És ez minden más pozitív egész számra igaz.)

Tanár: Igen. Tudunk-e ez alapján rögtön egy másik osztót is mondani?

Diák: Igen, magát a 120-at.

Tanár: És ezt hova írjam a táblára?

Diák: Ha az 1-et a bal szélre írtuk, akkor ezt most írjuk a jobb szélre, mert ez a 120 legnagyobb osztója.

Tanár: Jó ötlet. 1-gyel és önmagával minden szám osztható, ezeket **nem valódi osztó**knak nevezzük. Írjuk ezt az elnevezést az 1 és a 120 alá. Hogyan folytassuk?

Diák: A 120 következő osztója a 2.

Tanár: Miért osztója a 120-nak a 2?

Diák: Mert $120 = 2 \cdot 60$. Ez alapján a 60-at is felírhatjuk a 120 mellé a jobb oldalra.

Tanár: Így van, ezek már **valódi osztók**, írjuk fel ezt az elnevezést is.

Ez elég ügyes módszer az osztók keresésére. Párban keressük őket. Az ilyen párokat **osztópárok**nak nevezzük. Rögzítsük ezt az elnevezést is! Mi a következő osztópár?

Diákok:

- A 3 és a 40.
- A 4 és a 30.
- Az 5 és a 24.
- A 6 és a 20.
- 7-tel nem osztható.
- 8-cal viszont igen.

Tanár: Kinek van ügyes módszere, hogy megállapítsa, hogy mi a 8 párja?

Diák: Osztom a 120-at 8-cal.

Tanár: Jó-jó, de nincs-e valamilyen gyorsabb módszer?

Diák: $120 = 4 \cdot 30$. Ha az egyik szorzótényezőt duplájára változtatom, akkor a másikat a felére kell csökkentenem, hogy a szorzat ne változzon. Tehát $120 = 8 \cdot 15$.

Tanár: Milyen kapcsolat ez az osztópárok tagjai között?

Diák: Fordított arányosság.

Tanár: Ez a gondolat segít, hogy gyorsabban találjunk osztókat. Folytassuk!

Diákok:

- 9-cel nem osztható.
- 10 és 12.
- 11-gyel nem osztható.

Tanár: És meddig kell folytatnunk a vizsgálódást? 120-ig? Az elég fárasztó lesz…

Diák: Nem, mert párban keressük az osztókat, így megtaláljuk a nagy osztókat is.

Tanár: Akkor meddig kell elmennünk?

Diák: Elég a szám feléig.

Tanár: Tehát 60-ig? Mindenki egyetért ezzel?

Diák: Nem, szerintem már nem kell továbbmennünk. A 10 párja a 12, 11-gyel meg nem osztható. A 11-nél nagyobb osztókat már megtaláltuk a párjukkal.

Tanár: Ki tudja megfogalmazni, hogy legfeljebb meddig kell elmennünk az ellenőrzéssel, ha egy szám osztóit keressük az osztópárok módszerével?

Diák: A négyzetgyökéig, mert a kisebbik osztó legfeljebb ekkora lehet.

Tanár: És mekkora a 120 gyöke?

Diák: 11-nél valamivel kisebb, mert 11 négyzete 121.

Tanár: Nagyon jó, akkor a végére értünk a 120 osztóinak. Ki tudja összefoglalni, hogyan kell keresni egy szám osztóit osztópárok módszerével?

Diák: Elkezdjük az 1-gyel, felírjuk az 1-et és a párját, magát a számot. Utána folytatjuk a 2-vel. Ha osztható vele a szám, akkor felírjuk a 2-t és a párját. És így tovább. Ezt egészen addig csináljuk, amíg el nem érjük a szám négyzetgyökét.

Tanár: Nagyon jó. Azzal egészíteném még ki, hogy a fordított arányosság gondolata segíthet a párok megtalálásában.

3. Az osztógrafikon elkészítése (15 perc)

Módszertani megjegyzések

A most következő rész célja, hogy a diákok megismerkedjenek azzal az izgalmas hozzárendeléssel, mely minden természetes számhoz hozzárendeli a pozitív osztóit. A hozzárendelés grafikonját a diákok maguk hozzák létre kis segítséggel, és egy olyan ábrát kapnak, amely reményünk szerint többüknek felkelti az érdeklődését. A hozzárendelés grafikonja megtalálható az alábbi geogebra ábrán:

https://www.geogebra.org/classic/huz3wnma

A grafikon kivetítését csak később javasoljuk, fontosnak tartjuk, hogy az ábra elkészítését közösen kezdjék el a diákok a füzetben és a tanár a táblánál.

Tanár: Elég jól belejöttünk már az osztók keresgélésébe. Most eggyel tovább lépünk, és megpróbáljuk vizualizálni kicsit az eddigieket. A vizualizáció egy nagyon fontos és hasznos eszköz, nem véletlen, hogy nagy cégek fizetnek elég sokat azért, hogy az adataikból szakemberek minél jobb vizualizációkat készítsenek, amelyek aztán segítik őket egy-egy céget érintő döntésben.

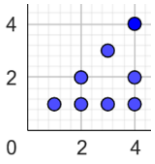
A számok osztóit többféle módon lehet vizualizálni, most nem egy-egy szám osztóit fogjuk megjeleníteni, hanem sorban a természetes számokét. Ehhez mindenki vegyen fel a füzetébe egy legalább 15 cm-es x-tengelyt, és rá merőlegesen a bal szélre egy legalább 15 cm-es y-tengelyt. Legyen a rácsnégyzet oldala az egység, így 30-ig kiférnek a számok mindkét tengelyen.

Soroljátok fel nekem az 1, 2, 3 és 4 osztóit!

Diák: Az 1-nek csak önmaga, a 2-nek 1 és 2, a 3-nak 1 és 3, a 4-nek az 1, 2 és a 4.

Tanár: Remek, ezt a következőképpen fogom jelölni a koordináta-rendszerben:

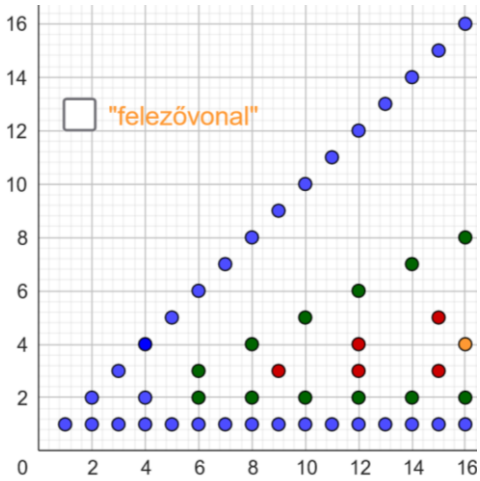
- Ha $x = 1$, akkor csak $y = 1$-hez teszek egy pontot.
- Ha $x = 2$, akkor $y = 1$-hez és $y = 2$-höz teszek pontokat.
- Ha $x = 3$, akkor $y = 1$-hez és $y = 3$-hoz teszek pontokat.
- Ha $x = 4$, akkor $y = 1$-hez, $y = 2$-höz és $y = 4$-hez teszek pontokat.



Tanár: Tudnátok folytatni a grafikon elkészítését? Kérlek, hogy $x = 16$-ig készítsétek el a grafikont. Elsőre elég monoton elfoglaltságnak tűnik, de ígérem, a végeredményben elég sok érdekes szabályosság lesz, érdemes az elkészítésével kicsit vacakolni. 5 percetek van rá. Alapvetően egyedül dolgozzatok, de nyugodtan egyeztessétek a padtársatokkal, illetve ha nem sikerül elindulnotok, szóljatok nekem, és segítek.

Módszertani megjegyzések

Miközben a tanár az előzőeket mondja, elkezdi a táblán felrajzolni a grafikont az elmondottakkal összhangban.



1. ábra Az osztógrafikon rendelkezésre álló darabja

Módszertani megjegyzések

A tanár körbejárva segíti az elakadókat, az idő lejárta előtt pedig megkér egy gyorsan haladó diákot, hogy a táblára is rajzolja fel a grafikont. Miután ez megtörtént, a csoport figyelmét kéri, hogy alaposabban körbejárják közösen, mi is történt eddig.

Tanár: Nagyon sok szép grafikon keletkezett a füzeteitekben. Meg tudjátok mondani, hogy mi az, amit igazából ábrázoltunk a koordináta-rendszerben?

Diák: Egy függvényt?

Tanár: Milyen függvényt?

Diák: Azt a függvényt, amely minden számhoz hozzárendeli az osztóit.

Tanár: Nagyon sok jó elemet tartalmaz, amit mondasz, kiindulásnak szuper, de pontosítsuk egy kicsit. Azt mondod, minden számhoz. Minden számhoz?

Diák: Minden pozitív természetes számhoz.

Tanár: Igen, ez egy nagyon fontos kikötés, nem tartozik érték például az $\frac{1}{2}$-hez. De van ám még egy dolog, úgy kezdte XY a mondatát, hogy „azt a függvényt”. Valakinek ehhez hozzáfűzne valamit?

Diák: A függvény egy számhoz csak egy másikat rendel. Nem ezzel van a gond?

Tanár: De bizony, itt egy alaphalmazbeli elemhez több képhalmazbeli is tartozhat, tehát ez nem függvény. Tudtok ilyen alaphalmazbeli elemre példát mondani?

Diák: Például a 4-hez hozzárendeltük az 1-et, a 2-t és a 4-et is.

Tanár: Na ez így már teljesen pontos, rögzítsük is, amire jutottunk.

Osztógrafikon

- Annak a hozzárendelésnek a grafikonja, amely minden pozitív természetes számhoz hozzárendeli az osztóit.
- Alaphalmaz és képhalmaz: pozitív természetes számok halmaza.
- Ez a hozzárendelés nem függvény.

Tanár: Tudtok-e olyan módszert mondani, amivel a folytatásban esetleg gyorsabban haladnánk?

Diák: Igen, mivel az 1 minden számnak osztója, felvehetjük az összes olyan rácspontot, amelynek második koordinátája 1.

Tanár: Szuper. Ezek a pontok mind illeszkednek az $f(x) = 1$ konstans függvény grafikonjára, azaz arra az egyenesre, amely párhuzamos az x tengellyel és tőle 1 egység távolságra halad. Mivel ennek az egyenesnek a pontjaira mind igaz, hogy y koordinátájuk 1, emiatt időnként úgy is hivatkozunk rá, hogy ez az $y = 1$ egyenletű egyenes.

De visszatérve az egyenes pontjaira, össze is köthetjük akár ezeket a pontokat?

Diák: Nem, mert most csak pozitív egész számokhoz rendelünk hozzá.

Tanár: Igazad van, a kapott pontok nem köthetők össze. Van-e valakinek más ötlete a gyorsabb haladásra?

Diák: És minden számnak osztója önmaga, azaz bejelölhetjük az összes olyan rácspontot is, amelyek x és y koordinátája megegyezik.

Tanár: Nagyon jó. Ezek a pontok melyik függvény grafikonjára illeszkednek?

Diák: Az $f(x) = x$ lineáris függvény grafikonjára/ $y = x$ egyenletű egyenesre, azaz az origón áthaladó, 1 meredekségű egyenesre.

Tanár: Hogy is nevezzük azokat osztókat, amiket most jelöltünk?

Diák: Nem valódi osztók.

Tanár: Van-e valakinek ügyes módszere a valódi osztók keresésére?

Diák: Minden második szám páros, azaz megjelölhetnénk minden második rácspontot az $f(x) = 2$ konstans függvény grafikonján/ $y = 2$ egyenletű egyenesen.

Tanár: Ez remek gondolat. Csináljuk meg!

Diák: És hasonló elven megjelölhetnénk minden harmadik pontot az $f(x) = 3$ konstans függvény grafikonján/ $y = 3$ egyenletű egyenesen.

Tanár: Bizony. Ezzel elég sok muníciót kaptunk a grafikon elkészítéséhez. Haladhattok számonként is, osztókat keresve, de használhatjátok a most elhangzott ötletet is. Fejezzétek be a grafikont!

Módszertani megjegyzés

A grafikon befejezését $x = 30$-ig adhatjuk házi feladatnak is.

4. Osztójáték (8 perc)

Az óra utolsó tevékenysége egy újabb Osztójáték, ezúttal a **120** alapszámmal (ennek osztóit már összeírtuk az óra elején). A megmaradt időmennyiségtől függően a tanár döntse el, hogy milyen formában és mennyiségben játszatja a diákokat. Ha kevés idő maradt, a padtársak játsszanak egymással néhány menetet, ha kicsit több, lehetőség van valamiféle „minibajnokság” kivitelezésére is, erre az Osztójáték leírásában teszünk javaslatot.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán megbeszéltük az osztók keresését az osztópárok módszerével. Utána elkészítettük annak a hozzárendelésnek a grafikonját 16-ig, amelyik mindegyik pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám osztóit, ezt osztógrafikonnak nevezzük.

Javasolt házi feladatok

1. Osztógrafikon befejezése 30-ig.

Magyarázat: A következő órán részletesen foglalkozunk még a grafikonnal, ezért jó lenne, ha mindenkinek meglenne.

2. Keressetek olyan számokat, amelyekkel biztosan győzni tudtok az Osztójátékban! Ti dönthetitek el, hogy kezdeni szeretnétek, vagy átadjátok a kezdés jogát.

Magyarázat: Valószínűleg a diákok többsége felfedezi, hogy prímekkel könnyen tudnak nyerni. Ez jól kapcsolódik a következő órához. Haladni szeretnénk azon felismerés felé, hogy a játék lefolyása a prímtényezős felbontáson múlik.

3. Fejtörő

A török szultán börtönében 100 cella van, minden cellában egy-egy rab csücsül. A szultán jókedvében úgy dönt, hogy néhány rabot szabadon bocsát, de erre igen fifikás módszert eszel ki. Alaphelyzetben minden cella zárva van. A szultán elküld egy őrt, hogy fordítson egyet minden cella zárján. Aztán elküld egy másikat, hogy fordítson minden másodikon (azaz zárja vissza a 2., 4., 6., 8., ..., 100. cellát). Aztán elküld egy harmadikat, hogy fordítson minden harmadik záron (ha nyitva van, zárja be; ha zárva van, nyissa ki). És így tovább, a 100. őr csak a 100. ajtó zárján fordít. Amelyik cella ajtaja ezek után nyitva van, onnan távozhat a rab. Hány rab fog szabadulni, és honnan?

Magyarázat: A feladat az osztók számával kapcsolatos: azok a cellák maradnak nyitva, amelyeknek páratlan számú osztójuk van. Ezek pont a négyzetszámok, tehát 10 rab szabadul. Már az osztópárok módszere segíthet rájönni a megoldásra, de a későbbi órákon visszatérünk még az osztók számára.

Mellékletek

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

számelmélet_02_melléklet_táblázatos óravázlat