

II. óra: Keressünk osztókat!

Az óra célja: Osztók keresése osztópárok módszerével, osztók eloszlásának vizsgálata az osztógrafikon segítségével.

Előzetes tudás: fordított arányosság, négyzetgyökvonás, hozzárendelés, függvény

Központi fogalmak: osztó, valódi osztó, osztópár

Az óra legfontosabb elemei

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Bemelegítés	egyéni munka		5 perc
2.	Osztók keresése az osztópárok módszerével	frontális megbeszélés	tábla, kréta	15 perc
3.	Az osztógrafikon elkészítése	frontális megbeszélés, egyéni munka	tábla, kréta	15 perc
4.	Osztójáték	pármunka	prezentáció a szabályokkal, üres lapok	8 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán osztókat keresünk az osztópárok módszerével. Elkészítjük az osztók eloszlását mutató grafikont, amelyet a következő órán fogunk részletesen elemezni. Folytatjuk az osztójátékot.

Az óra előkészítése

Opcionális:

- Prezentáció** az osztójáték szabályaival.
https://docs.google.com/presentation/d/1I6NO9k-BFVsl1oKROXTq-jLjkmcl6Q_FACZxRB5Ov3M/edit?usp=sharing
- Üres lapok** az osztójátékhoz. (Játszhatják a füzetükben is.)

Az óra felépítése

1. Bemelegítés (5 perc)

Tanári közlés: A múlt órán megismerkedtünk az **osztó**, **többszörös**, **maradék** fogalmával. Ismétlésként nézzünk néhány példát. Legyen a 120 az a szám, amit vizsgálunk. Mindenki írjon fel a füzetébe 3 mondatot, amelyben használja a három szakkifejezést a 120-szal kapcsolatban.

Módszertani megjegyzések

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak. Akik hamarabb elkészülnek, írhatnak további mondatokat!

2. Osztók keresése (15 perc)

Tanár: Halljunk néhányat a felírt mondatokból! Mindenki mondjon egyet, de ügyeljete rá, hogy ugyanaz ne hangozzon el többször.

Diákok: (példák)

- A 2 osztója a 120-nak.
- A 120 többszöröse a 6-nak.
- A 120 1 maradékot ad 7-tel osztva.
- A 120 osztója a 360-nak.
- Az 120 000 többszöröse a 120-nak.
- A 125 5 maradékot ad 120-szal osztva.

Módszertani megjegyzések

Kérdezzünk rá, az egyes mondatokra, hogy honnan tudják. (Például a 120 osztható 2-vel, mert $120 = 2 \cdot 60$.) A hibás mondatokat javítsuk ki közösen.

Miközben mondják a mondatokat, írjuk fel a 120 említett osztóit.

Tanár: Nagyon ügyesek vagytok, jól használtátok a szakkifejezéseket. A mondataitok alapján felírtam a 120 néhány osztóját. Megtaláltuk az összeset? Hogyan kellene ezt ellenőrizni?

Diák: Érdeemes lenne nagyság szerint rendezni őket.

Tanár: Nagyon jó. Mivel kezdjük?

Diák: Az 1-gyel, mert azzal minden szám osztható.

Tanár: Miért?

Diák: Mert $120 = 1 \cdot 120$. (És ez minden más pozitív egész számra igaz.)

Tanár: Igen. Tudunk-e ez alapján rögtön egy másik osztót is mondani?

Diák: Igen, magát a 120-at.

Tanár: És ezt hova írom a táblára?

Diák: Ha az 1-et a bal szélre írtuk, akkor ezt most írjuk a jobb szélre, mert ez a 120 legnagyobb osztója.

Tanár: Jó ötlet. 1-gyel és önmagával minden szám osztható, ezeket **nem valódi osztóknak** nevezzük. Írjuk ezt az elnevezést az 1 és a 120 alá. Hogyan folytassuk?

Diák: A 120 következő osztója a 2.

Tanár: Miért osztója a 120-nak a 2?

Diák: Mert $120 = 2 \cdot 60$. Ez alapján a 60-at is felírhatjuk a 120 mellé a jobb oldalra.

Tanár: Így van, ezek már **valódi osztók**, írjuk fel ezt az elnevezést is.

Ez elég ügyes módszer az osztók keresésére. Párban keressük őket. Az ilyen párokat **osztópárok**nak nevezzük. Rögzítsük ezt az elnevezést is! Mi a következő osztópár?

Diákok:

- A 3 és a 40.
- A 4 és a 30.
- Az 5 és 24.
- A 6 és a 20.
- 7-tel nem osztható.
- 8-cal viszont igen.

Tanár: Kinek van ügyes módszere, hogy megállapítsa, hogy mi a 8 párja?

Diák: Osztom a 120-at 8-cal.

Tanár: Jó-jó, de nincs-e valamilyen gyorsabb módszer?

Diák: $120 = 4 \cdot 30$. Ha az egyik szorzótényezőt duplájára változtatom, akkor a másikat a felére kell csökkentenem, hogy a szorzat ne változzon. Tehát $120 = 8 \cdot 15$.

Tanár: Milyen kapcsolat ez az osztópárok tagjai között?

Diák: Fordított arányosság.

Tanár: Ez a gondolat segít, hogy gyorsabban találjunk osztókat. Folytassuk!

Diákok:

- 9-cel nem osztható.
- 10 és 12.
- 11-gyel nem osztható.

Tanár: És meddig kell folytatnunk a vizsgálódást? 120-ig? Az elég fárasztó lesz...

Diák: Nem, mert párban keressük az osztókat, így megtaláljuk a nagy osztókat is.

Tanár: Akkor meddig kell elmennünk?

Diák: Elég a szám feléig.

Tanár: Tehát 60-ig? Mindenki egyetért ezzel?

Diák: Nem, szerintem már nem kell továbbmennünk. A 10 párja a 12, 11-gyel meg nem osztható. A 11-nél nagyobb osztókat már megtaláltuk a párjukkal.

Tanár: Ki tudja megfogalmazni, hogy legfeljebb meddig kell elmennünk az ellenőrzéssel, ha egy szám osztóit keressük az osztópárok módszerével?

Diák: A négyzetgyökéig, mert a kisebbik osztó legfeljebb ekkora lehet.

Tanár: És mekkora a 120 gyöke?

Diák: 11-nél valamivel kisebb, mert 11 négyzete 121.

Tanár: Nagyon jó, akkor a végére értünk a 120 osztóinak. Ki tudja összefoglalni, hogyan kell keresni egy szám osztóit osztópárok módszerével?

Diák: Elkezdjük az 1-gyel, felírjuk az 1-et és a párját, magát a számot. Utána folytatjuk a 2-vel. Ha osztható vele a szám, akkor felírjuk a 2-t és a párját. És így tovább. Ezt egészen addig csináljuk, amíg el nem érjük a szám négyzetgyökét.

Tanár: Nagyon jó. Azzal egészíteném még ki, hogy a fordított arányosság gondolata segíthet a párok megtalálásában.

3. Az osztógrafikon (15 perc)

Módszertani megjegyzések

A most következő rész célja, hogy a diákok megismerkedjenek azzal az izgalmas hozzárendeléssel, mely minden természetes számhoz hozzárendeli a pozitív osztóit. A hozzárendelés grafikonját a diákok maguk hozzák létre kis segítséggel, és egy olyan ábrát kapnak, amely reményünk szerint többüknek felkelti az érdeklődését. A hozzárendelés grafikonja megtalálható az alábbi geogebra ábrán:

<https://www.geogebra.org/classic/huz3wnma>. A grafikon kivetítését csak később javasoljuk, fontosnak tartjuk, hogy az ábra elkészítését közösen kezdjék el a diákok a füzetben, és a tanár a táblánál.

Az osztógrafikont, és annak módszertani hasznosságát Imrecze Zoltánné hagyatékából ismertük meg.

Tanár: Elég jól belejöttünk már az osztók keresgélésébe. Most eggyel tovább lépünk, és megpróbáljuk vizualizálni kicsit az eddigieket. A vizualizáció egy nagyon fontos és hasznos eszköz, nem véletlen, hogy nagy cégek fizetnek elég sokat azért, hogy az adataikból szakemberek minél jobb vizualizációkat készítsenek, amelyek aztán segítik őket egy-egy céget érintő döntésben.

A számok osztóit többféle módon lehet vizualizálni, most nem egy-egy szám osztóit fogjuk megjeleníteni, hanem sorban a természetes számokét. Ehhez mindenki vegyen fel a füzetébe egy legalább 15 cm-es x -tengelyt, és rá merőlegesen a bal szélre egy legalább 15 cm-es y -tengelyt. Legyen a rácsnégyzet oldala az egység, így 30-ig kiférnek a számok mindkét tengelyen.

Soroljátok fel nekem az 1, 2, 3 és 4 osztóit!

Diák: Az 1-nek csak önmaga, a 2-nek 1 és 2, a 3-nak 1 és 3, a 4-nek az 1, 2 és a 4.

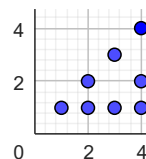
Tanár: Remek, ezt a következőképpen fogom jelölni a koordináta-rendszerben:

- Ha $x=1$, akkor csak $y=1$ -hez tesztek egy pontot.
- Ha $x=2$, akkor $y=1$ -hez és $y=2$ -höz tesztek pontokat.

- Ha $x=3$, akkor $y=1$ -hez és $y=3$ -hoz teszünk pontokat.
- Ha $x=4$, akkor $y=1$ -hez, $y=2$ -hez és $y=4$ -hez teszünk pontokat.

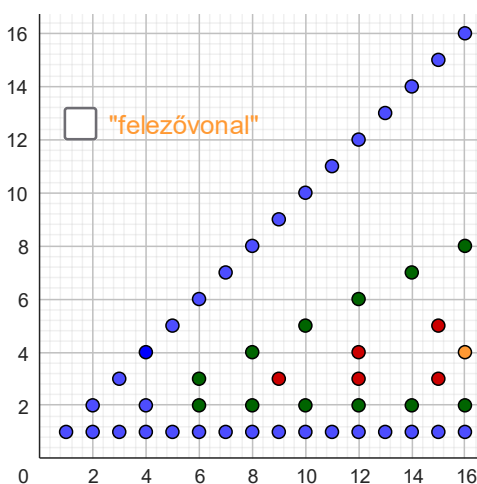
Tanár: Tudnátok folytatni a grafikon elkészítését? Kérlek, hogy $x = 16$ -ig készítsétek el a grafikonot. Elsőre elég monoton elfoglaltságnak tűnik, de ígérem, a végeredményben elég sok érdekes szabályosság lesz, érdemes az elkészítésével kicsit vacakolni, 5 perctek van rá.

Alapvetően egyedül dolgozzatok, de nyugodtan egyeztessétek a padtársatokkal, illetve ha nem sikerül elindulnotok, szóljatok nekem, és segítsek.



Módszertani megjegyzések

Miközben a tanár az előzőeket mondja, elkezd a táblán felrajzolni a grafikon az elmondottakkal összhangban.



1. ábra Az osztógrafikon rendelkezésre álló darabja

Tanár: Nagyon sok szép grafikon keletkezett a füzetetekben. Meg tudjátok mondani, hogy mi az, amit igazából ábrázoltunk a koordináta-rendszerben?

Diák: Egy függvényt?

Tanár: Milyen függvényt?

Diák: Azt a függvényt, amely minden számhoz hozzárendeli az osztóit.

Tanár: Nagyon sok jó elemet tartalmaz, amit mondasz, kiindulásnak szuper, de pontosítsuk egy kicsit. Azt mondd, minden számhoz. Minden számhoz?

Diák: Minden pozitív természetes számhoz.

Tanár: Igen, ez egy nagyon fontos kikötés, nem tartozik érték például az $\frac{1}{2}$ -hez. De van ám még egy dolog, úgy kezdte XY a mondatát, hogy „azt a függvényt”. Valakinek ehhez hozzáfűzne valamit?

Diák: A függvény egy számhoz csak egy másikat rendel. Nem ezzel van a gond?

Tanár: De bizony, itt egy alaphalmazbeli elemhez több képhalmazbeli is tartozhat, tehát ez nem függvény. Tudtok ilyen alaphalmazbeli elemre példát mondani?

Diák: Például a 4-hez hozzárendeltük az 1-et, a 2-t és a 4-et is.

Módszertani megjegyzések

A tanár körbejárva segíti az elakadókat, az idő lejártá előtt pedig megkér egy gyorsan haladó diákot, hogy a táblára is rajzolja fel a grafikonot. Miután ez megtörtént, a csoport figyelmét kéri, hogy alaposabban körbejárják közösen, mi is történt eddig.

Tanár: Na ez így már teljesen pontos, rögzítsük is, amire jutottunk.

Tanár: Tudtok-e olyan módszert mondani, amivel a folytatásban esetleg gyorsabban haladnánk?

Diák: Igen, mivel az 1 minden számnak osztója, felvehetjük az összes olyan rácspontot, amelynek második koordinátája 1.

Tanár: Szuper. Ezek a pontok mind illeszkednek az $f(x) = 1$ konstans függvény grafikonjára, azaz arra az egyenesre, amely párhuzamos az x tengellyel, és tőle 1 egység távolságra halad. Mivel ennek az egyenesnek a pontjaira mind igaz, hogy y koordinátájuk 1, emiatt időnként úgy is hivatkozunk rá, hogy ez az $y=1$ egyenletű egyenes.

De visszatérve az egyenes pontjaira, össze is köthetjük akár ezeket a pontokat?

Diák: Nem, mert most csak pozitív egész számokhoz rendelünk hozzá.

Tanár: Igazad van, a kapott pontok nem köthetők össze. Van-e valakinek más ötlete a gyorsabb haladásra?

Diák: És minden számnak osztója önmaga, azaz bejelölhetjük az összes olyan rácspontot is, amelyek x és y koordinátája megegyezik.

Tanár: Nagyon jó. Ezek a pontok melyik függvény grafikonjára illeszkednek?

Diák: Az $f(x) = x$ lineáris függvény grafikonjára/ $y = x$ egyenletű egyenesre, azaz az origón áthaladó, 1 meredekségű egyenesre.

Tanár: Hogy is nevezzük azokat osztókat, amiket most jelöltünk?

Diák: Nem valódi osztók.

Tanár: Van-e valakinek ügyes módszere a valódi osztók keresésére?

Diák: Minden második szám páros, azaz megjelölhetnénk minden második rácspontot az $f(x) = 2$ konstans függvény grafikonján/ $y = 2$ egyenletű egyenesen.

Tanár: Ez remek gondolat. Csináljuk meg!

Diák: És hasonló elven megjelölhetnénk minden harmadik pontot az $f(x) = 3$ konstans függvény grafikonján/ $y = 3$ egyenletű egyenesen.

Tanár: Bizony. Ezzel elég sok muníciót kaptunk a grafikon elkészítéséhez. Haladhattok számonként is, osztókat keresve, de használhatjátok a most elhangzott ötletet is. Fejezzétek be a grafikon!

Módszertani megjegyzések

A tanár rögzíti a táblára a grafikon alá:

- Annak a hozzárendelésnek a grafikonja, amely minden pozitív természetes számhoz hozzárendeli az osztóit.
- Alaphalmaz és képhalmaz: pozitív természetes számok halmaza.
- Ez a hozzárendelés nem függvény.

Módszertani megjegyzés

A grafikon befejezését $x = 30$ -ig adhatjuk házi feladatnak is.

4. Osztójáték (8 perc)

Az óra utolsó tevékenysége egy újabb osztójáték, ezúttal **120** alapszámmal (ennek osztóit már összeírtuk az óra elején). A megmaradt időmennyiségtől függően a tanár döntse el, hogy milyen formában és mennyiségben játszatja a diákokat. Ha kevés idő maradt, a padtársak játsszanak egymással néhány menetet, ha kicsit több, lehetőség van valamiféle „minibajnokság” kivitelezésére is, erre az alapdokumentumban teszünk javaslatot.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán megbeszéltük az osztók keresését osztópárokkal. És elkészítettük annak a hozzárendelésnek a grafikonját 16-ig, amelyik mindegyik pozitív egész számhoz hozzárendeli a szám osztóit.

Javasolt házi feladatok:

1. Osztógrafikon befejezése 30-ig.

Magyarázat: A következő órán részletesen foglalkozunk még a grafikkal, ezért jó lenne, ha mindenkinek meglenne.

2. Keressetek olyan számokat, amelyekkel biztosan győzni tudtok az osztójátékban! Ti dönthetitek el, hogy kezdeni szeretnétek, vagy átadjátok a kezdés jogát.

Magyarázat: Valószínűleg a diákok többsége felfedezi, hogy prímekekkel könnyen tudnak nyerni. Ez jól kapcsolódik a következő órához. Haladni szeretnénk azon felismerés felé, hogy a játék lefolyása a prímtenyezős felbontáson múlik.

3. Fejtörő

A török szultán börtönében 100 cella van, minden cellában egy-egy rab csücsül. A szultán jókedvében úgy dönt, hogy néhány rabot szabadon bocsát, de erre igen fifikás módszert eszel ki:

Alaphelyzetben minden cella zárva van. A szultán elküld egy őrt, hogy fordítson egyet minden cella zárján. Aztán elküld egy másikat, hogy fordítson minden másodikon (azaz zárja vissza a 2., 4., 6., 8., ..., 100. cellát). Aztán elküld egy harmadikat, hogy fordítson minden harmadik záron (ha nyitva van, zárja be; ha zárva van, nyissa ki). És így tovább, a 100. őr csak a 100. ajtó zárján fordít. Amelyik cella ajtaja ezek után nyitva van, onnan távozhat a rab.

Hány rab fog szabadulni, és honnan?

Magyarázat: A feladat az osztók számával kapcsolatos: azok a cellák maradnak nyitva, amelyeknek páratlan számú osztójuk van. Ezek pont a négyzetszámok, tehát 10 rab szabadul. Már az osztópárok módszere segíthet rájönni a megoldásra, de a későbbi órákon visszatérünk még az osztók számára.

Mellékletek

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Gyakorlófeladatok (lehetséges házi feladat)

Képletté alakítható szöveges feladatokat tartalmazó gyakorlófeladatsor. Felhasználhatjuk házi feladatként, vagy megoldhatjuk egy gyakorlóórán közösen.