

I. óra: Osztjuk az ész!

Az óra célja: Bevezetés. Előzetes tudás felmérése. Osztó, többszörös maradék fogalmának megbeszélése. Osztójáték megismerése.

Előzetes tudás: felső tagozatos számelmélet ismeretek

Központi fogalmak: osztó, többszörös, maradék

Az óra legfontosabb elemei

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Bevezető feladatok megoldása	pármunka	feladatlap	10 perc
2.	Számelméleti gondolattérkép készítése	csoportmunka	csomagolópapírok és filcek	10 perc
3.	Osztó, többszörös és maradék fogalma	frontális megbeszélés	tábla, kréta	10 perc
4.	Osztójáték	tanári közlés, pármunka	prezentáció, üres lapok	13 perc
5.	Az óra lezárása	tanári közlés		2 perc

Ezen az órán egyszerű számelméleti problémák segítségével mérjük fel a tanulók korábbi (felső tagozatról) hozott ismereteit. Tisztázzuk az osztó, többszörös, maradék fogalmát. Végül a tanulók megismerkednek az osztójátékkal, amelyet a következő órákon is játszanak majd.

- Bevezető feladatok megoldása pármunkában.** A feladatok kapcsolódnak központi számelméleti fogalmakhoz, de egy részük előzetes számelméleti tudás nélkül is megoldható. (10 perc)
- Számelméleti gondolattérkép készítése 4-6 fős csoportokban.** A bevezető feladatok segítségével előhívott fogalmakat a tanulók egy gondolattérképen jelenítik meg. (10 perc)
- Osztó, többszörös, maradék fogalmának átbeszélése frontálisan.** (10 perc)
- Osztójáték párban.** A diákok megismerkednek az osztójáték szabályaival, majd párban játszanak néhány fordulót. (15 perc)

Az óra előkészítése

Szükséges:

- Bevezető feladatok** nyomtatása. (A és B verzió úgy, hogy páronként egy-egy jusson, vagy egységesen az egyik verzió páronként két-két példányban.)
Fájlnév: # számelmélet_01_ki_mit_tud
- A3-as lapok vagy csomagolópapír** (ahány csoport lesz a gondolattérkép készítésnél) és színes filcek (legalább annyi szín, ahány fős egy csoport lesz).

Opcionális:

1. **Prezentáció** az osztójáték szabályaival:
https://docs.google.com/presentation/d/1I6NO9k-BFVsl1oKROXTq-jLjkmcl6Q_FACZxRB5Ov3M/edit?usp=sharing
2. **Üres lapok** az osztójátékhoz. (Játszhatják a füzetükben is.)
3. Ha van lehetőség **vetíteni**, akkor hasznos lehet az idő mérése látható formában, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével.

Az óra felépítése

1. Bevezető feladatok (10 perc)

Tanári közlés: A mai órán új témakört kezdünk, ehhez hoztam bevezető feladatokat. Szeretném, ha párban dolgoznátok. A páros egyik tagja az A jelű feladatlapot kapja, a másik a B jelűt. A kérdések hasonlóak, de nem teljesen ugyanazok. A páron belül beszélgetsetek róluk, segítsétek egymást. A feladatok az előzetes tudásotok felmérésére szolgálnak, ne ijedjete meg, ha nem megy egyik vagy másik, menjetek tovább a következő feladatra. Az elkövetkező órákon mindent alaposan megbeszélünk majd, de szeretném tudni, mi az, ami jól megy, és mit kell várhatóan többit gyakorolni. 8 perctek van a feladatok megoldására!

Módszertani megjegyzések

A párok lehetnek az egymás mellett ülő tanulók, de dolgozhatunk véletlenszerű párokkal is, ehhez használhatjuk például a <https://flippity.net/> „Random name picker” alkalmazását.

A kétféle feladatlap biztosítja, hogy a pár mindkét tagja aktívan részt vegyen a munkában, de dönthetünk úgy is, hogy csak egyféle feladatlapot használunk.

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével!

2. Gondolattérkép készítése (10 perc)

Tanár: Van már közöttetek olyan, aki a bevezető feladatok alapján tudja, mivel foglalkozunk majd?

Diákok: Számokkal. Oszthatósággal. Maradékokkal.

Tanár: Nagyon jó. A matematikának azt az ágát, amely ezekkel foglalkozik, **számelméletnek** nevezzük. Ez lesz most a témánk, korábban találkoztatok már vele felső tagozatban. Azt szeretném, ha két(-három) pár alkotna egy nagyobb csoportot. Osztok minden csoportnak egy nagy lapot és színes filceket. Írjátok fel középre, hogy „Számelmélet”. Osszátok ki egymás között a színes tollakat. Írjátok fel a lap túloldalára a neveket a saját színes tollatokkal. Fordítsátok vissza a lapot. Felváltva fogtok jönni. Aki jön, az mindig egy új szót vagy fogalmat ír fel a lapra, amit valamelyik korábban felírt szóhoz kapcsol. Így egy gondolattérképet kaptok majd, amiből én is látni fogom, hogy milyen számelméleti fogalmakat ismertek már. Ha valakinek nincsen már ötlete, akkor adhattok egymásnak tippeket, de mindig a soron következő írja le a szót. Ha felkerül valami a lapra, amiről nem tudjátok, hogy mit jelent, vagy bizonytalanok vagytok benne, oda tegyetek kérdőjelet. 8 perct dolgozhattok ezen.

Módszertani megjegyzések

Segítsük a párokból 4-6 fős csoportok kialakítását egyértelmű utasításokkal.

A magyarázatot érdemes a táblára rajzolt gondolattérkép vázlattal kiegészíteni.

A saját toll biztosítja, hogy a csoport minden tagja részt vegyen a munkában, érdemes ragaszkodni hozzá.

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével!

Ha jobbnak érezzük, akkor a gondolattérképek helyett készíthetünk közös szófelhőt pl. a www.mentimeter.com oldal segítségével.

3. Az osztó és többszörös fogalma (10 perc)

Módszertani megjegyzések

Miután a tanár begyűjtötte az elkészült gondolattérképeket, rátér, hogy az egész témakör legalapvetőbb fogalmait, az osztó, a többszörös és a maradék fogalmát megbeszéljék.

A következő párbeszédetek fiktívek, tisztában vagyunk vele, hogy a diákok itt leírt válaszai sokszor életszerűtlenek, nem fogalmaznak ilyen frappánsan. Mégis próbálunk valamit sugallni abból, hogy milyen válaszokra, ötletekre lenne jó rávezetni a csoportot.

Ez a frontális beszélgetés rész a csoport szintjétől függően rövidíthető. Azért írtuk le ilyen részletesen, hogy mutassuk, hogyan tudja a tanár rávezetni a diákokat a helyes definíció megalkotására. Mivel az oszthatóság a témakör központi fogalma, ezért fontos, hogy minden diák pontosan értse, helyesen használja ezt a fogalmat.

Tanár: Miután ilyen sok fogalmat összegyűjtöttetek, ami szerintetek a számelmülethez kapcsolódik, jó lenne, ha elkezdénénk összehangolni előzetes tudásotokat. Egyáltalán nem biztos, hogy mindenki ugyanazt érti egy-egy olyan fogalmon, ami előkerült a feladatsorban, sőt, lehet, hogy néhányan még nem is hallottátok valamelyik ott szerepelt kifejezést, ezzel sincs semmi baj.

A legtöbbször talán az osztó és osztható szavak szerepeltek a villámkérdések szövegében, induljunk ki ezekből. Tud valaki mondani egy példát arra, hogy mi az az osztó?

Diák: Például a 2 osztója a 6-nak.

Tanár: Nagyon jó, azt is meg tudod mondani, hogy miért?

Diák: Mert el tudtam osztani a 6-ot hárommal/ mert $2 \cdot 3 = 6$.

Tanár: Szuper. Az alapján, amit mondasz, a 2 a 7-nek is osztója, hiszen a 7-et is el tudom osztani 2-vel, az eredmény 3 és fél, másképp mondva $2 \cdot 3,5 = 7$. Van, aki esetleg másképp gondolja?

Diák: Fontos, hogy a 6-ban a 2 kereken háromszor van meg, a hétben viszont nincs meg kereken valahányszor.

Tanár: Ha jól értem, arra gondolsz, hogy fontos, hogy az osztáskor egész számot kapjunk. Ebben megállapodhatunk?

Tanár: Remek. Ezek szerint viszont a 2-nek osztója az $\frac{1}{2}$, mert pontosan 4-szer van meg benne. Sőt, a 2π -nek osztója a π , mert kereken kétszer van meg benne, maradék egy szál se. Van valami furcsa az előbbi gondolatmenetemben?

Diák3: Az, hogy mit keresnek benne a törtek.

Tanár: Fontos dologra tapintottál rá! Ebben a témakörben a törteket mellőzni fogjuk, sőt a negatív egész számokat és a 0-t is. Az utóbbiakat egyébként nyugodtan bevehetnénk a buliba, például miért ne mondhatnánk, hogy a 6-nak osztója a -2 ugyanúgy, mint a 2, de kicsit bonyolítaná a dolgunkat. Vegyéték elő a füzeteteket, mert elkezdjük feljegyezni azokat a fontos dolgokat, amiket idáig megállapítottunk.

Módszertani megjegyzések

A tanár vezetésével felkerül a táblára a cím (Számelmélet), valamint, hogy „Ebben a témában a pozitív egész számok halmazán vizsgálódunk”.

Tanár: Térjünk rá akkor újra az osztó fogalmára. Adott egy a és egy b pozitív egész szám. Mikor lesz osztója az a a b -nek?

Diák: Ha az a -t b -vel elosztva egész számot kapunk.

Tanár: Nagyon jó, akár ez is lehetne a definíció, de egy kicsit még dolgozunk rajta. Repüljünk vissza képzeletben felsőbe, és tegye fel a kezét az, aki jobban szeretett osztani, mint szorozni. Most pedig az, aki szorozni szeretett jobban!

Elégge úgy tűnik, hogy a szorzás kevésbé mumus, mint az osztás. A következőkben azon dolgozunk, hogy a definícióból kigyomláljuk az „osztani” szót. Ehhez mondok pár villámkérdést. Próbáljatok meg úgy válaszolni, hogy nem használjátok az osztás, osztani szót, sem azt, hogy megvan benne valahányszor.

Tanár: Miért osztója a 20-nak a 4?

Diák: Mert $4 \cdot 5 = 20$

Tanár: Miért osztója a 28-nak a 4?

Diák: Mert $4 \cdot 7 = 28$

Tanár: Miért osztója a 28-nak a 14?

Diák: Mert $14 \cdot 2 = 28$.

Tanár: Miért osztója az 60-nak a 6?

Diák: Mert $6 \cdot 10 = 60$

Tanár: Na, és osztója-e a 70-nek a 6?

Diák: Nincs meg benne egészszer.

Tanár: Jót mondtál, de használtad a tiltott kifejezést. Enélkül hogyan lehetne megfogalmazni? Gondoljunk bele, eddig végig szorzatokat mondtatok. Most milyen szorzatot is keresnénk?

Diák: 6-szor valami az 70.

Tanár: Na és mi van azzal a valamivel?

Diák: Hát, hogy nincs olyan. Mármint egész.

Tanár: Hoppá! Tehát 70-nek azért nem osztója a 6, mert nincs olyan egész szám, amivel 6-ot megszorozva 70-et kapunk. Másképp, nincs olyan k egész szám, ami igazzá teszi a $6 \cdot k = 70$ egyenletet. Írjuk csak fel ezt általában, a 6 helyett írjunk a -t, a 70 helyett b -t. Ekkor a kérdés, hogy találunk-e olyan számot a $\heartsuit$ helyére, ami igazzá teszi a $a \cdot \heartsuit = b$ egyenletet. Ezzel el is érkeztünk a definícióhoz, ezt már írjuk is fel.

Módszertani megjegyzések

A tanár név szerint szólítja a diákokat, hogy minél jobban pörögjön a sok apró kérdés. Praktikus, hogyha a szorzatokat a tanár a táblára is rögzíti, illetve felírja az „osztás” és „megvan benne” szavakat áthúzva.

Módszertani megjegyzések

A tanár rögzíti a táblára: $6 \cdot \heartsuit = 70$

Módszertani megjegyzések

A tanár rögzíti a definíciót:

Definíció: Legyen a és b két pozitív egész szám. Ekkor az a osztója b -nek (b osztható a -val), ha megadható olyan pozitív egész k szám, amelyre igaz, hogy $a \cdot k = b$.

Ilyenkor b -t az a többszörösének is nevezzük. Jelölés: $a \mid b$

Tanár: Hadd lássam, értetek-e mindent! Nézzük a következőt: $15 = 3 \cdot 5$. Mondjatok igaz mondatokat, használjátok a tanult szakkifejezéseket!

Diákok: A 15 osztható 3-mal. A 15 osztható 5-tel. A 3 osztója a 15-nek. Az 5 osztója a 15-nek. A 15 többszöröse a 3-nak. A 15 többszöröse az 5-nek.

Tanár: Még egy utolsó fogalmat szeretnék ma tisztázni. Ez a maradék fogalma. Tud valaki helyes mondatot mondani az előző kapcsolatra úgy, hogy a „maradék” szó is szerepeljen benne?

Diákok: A 15 3-mal való osztási maradéka 0. A 15 5-tel való osztási maradéka 0. A 15 0 maradékot ad 3-mal osztva. A 15 0 maradékot ad 5-tel osztva.

Tanár: És mi a helyzet a 16-tal? Az milyen maradékot ad 3-mal osztva?

Diák: 1-et.

Tanár: Miért?

Diák: Mert 1-gyel nagyobb egy olyan számnál (a 15-nél), ami osztható 3-mal.

Tanár: Igen. Ezt így írhatnánk fel: $16 = \underbrace{3 \cdot 5}_{3\text{-mal osztható rész}} + \underbrace{1}_{\text{maradék}}$.

És mit tudtok kiolvasni ebből?

$$29 = 6 \cdot 4 + 5$$

Diákok: A 29 5 maradékot ad 4-gyel osztva. A 29 5 maradékot ad 6-tal osztva.

Tanár: Ez mindenkinek tetszik? Valami ellenvetés esetleg?

Diák: Szerintem nem mondunk olyat, hogy valami 5 maradékot ad 4-gyel osztva. A helyes az lenne, hogy 1 maradékot ad 4-gyel osztva.

Tanár: Igazad van. A maradéktól azt várjuk, hogy kisebb legyen, mint az osztó.

4. Ismerkedés az osztójátékkal (13 perc)

Módszertani megjegyzés

Az osztójáték az egész témakör egyik kulcstevékenysége, részletes leírása egy külön dokumentumban található. Ez a játék Varga Tamástól származik, aki részletesen tárgyalja több remek cikkében is. Nem célunk, hogy ezekhez a cikkekhez bármilyen érdemi többletet hozzátegyünk, csupán arra teszünk javaslatot, hogyan lehet ezt a didaktikai szempontból fantasztikus játékot a normál tanórák menetébe beilleszteni úgy, hogy az szervesen kapcsolódjon az elsajátítandó ismeretekhez.

Módszertani megjegyzés:

A csoport szintjétől függően szóba kerülhet a 0-val való oszthatóság kérdése. (0-val nem osztunk, de a 0 osztható 0-val, hiszen bármely egész számmal megszorozzuk a 0-t, 0-t kapunk.) Ez az elméleti vizsgálódás segíthet elmélyíteni a definíciót, de kevésbé „matekos” csoportban ne erőltessük.

Tanár: Ha minden igaz, akkor a pár egyik tagja összegyűjtötte a 60 osztóit az óra eleji egyik bevezető feladatban. Segítetek összeszedni ezeket, hogy mindenkinek mindegyik meglegyen?

Tanár: Ezekkel a számokkal most párbajozni fogunk, mit szóltok? Van ugyanis egy kétszemélyes játék, egy rendkívüli magyar matematikus és matematikatanár, Varga Tamás találta ki.

A játék lényege annyi, hogy a két játékos egy előre rögzített szám, az alapszám önmagánál kisebb osztóit sorolja felváltva, és az veszít, aki már nem tud újat mondani. Izgalmasnak tűnik ez a játék? Ugye, hogy nem?

Módszertani megjegyzés

A diákok sorolják a 60 osztóit, a tanár a táblán rögzíti a felsorolást.

Ha Varga Tamás játéka csak ennyiből állna, elég unalmas lenne. Van azonban a játékban egy fontos feltétel, amit még nem mondtam: csak olyan számot lehet mondani, ami egyik idáig elhangzott számnak sem az osztója. Nézzünk egy példát, hogy lássuk, értitek-e.

Az alapszám tehát a 60, az első játékos 10-zel kezd. Tudtok egy olyan számot, amit a második játékos mondhat?

Diák: 15

Tanár: Nagyon jó. Mondjatok egy olyan számot, amit nem mondhat.

Diák: 7.

Tanár: Oké, ez igaz, de olyat is tudsz, ami osztója a 60-nak, viszont már nem mondhatja a második játékos?

Diák: Igen, az 5.

Tanár: Miért?

Diák: Mert az osztója a 10-nek, ami már elhangzott.

Tanár: Szuper! Tegyük fel, hogy a második játékos a 15-öt mondta. Mivel folytathatja az első játékos a játékot, mondjatok erre is példát!

Diák: Mondjuk a 20-szal.

Tanár: Remek, másik példátok is van?

Diák: 4.

Tanár: Szuper, úgy tűnik, megértettétek a játék lényegét. Rögzítem akkor a szabályait a táblán az egyértelműség kedvéért.

Tanár: Van-e kérdés a játék szabályaihoz? Ha nincsen, akkor a korábbi négyes csoportjaitokban fogtok körmérkőzéseket játszani. Ha gyorsan végeztek, akár több mérkőzést is játszhat egy-egy páros. Kezdődhet a párbajozás!

Módszertani megjegyzés

A tanár a szabályt rögzíti a táblára, vagy kivetíti a prezentációból:

1. Két játékos felváltva mond számokat.
2. Minden mondott szám az alapszám (most 60) önmagánál kisebb osztója kell, hogy legyen.
3. Az elhangzó szám nem lehet osztója korábban elhangzott számnak.
4. Az a játékos veszít, aki már nem tud (60-nál kisebb) osztót mondani.
5. A kezdésről sorsolás dönt, de a játékosok meg is állapodhatnak.

Módszertani megjegyzés: Tapasztalataink szerint nem szükségszerűen csak a jó matekosok győznek ebben a játékban, főleg eleinte emiatt nem kell attól tartani, hogy egy-egy matematikából jó diák túlzottan dominálja a négyesét. A tanár a legjobb játékosokat akár jutalmazhatja is a saját rendszere szerint.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: Adjátok be a bevezető feladatok megoldásait, hogy átnézhessem őket! A mai órán átismételtük az osztó, többszörös, maradék fogalmát.

Módszertani megjegyzés: Érdekes figyelmesen átnézni a beadott feladatlapokat, gondolatértékeket, hogy előre lássuk, mi az, ami a többségnek jól megy, hol vannak gyengébb pontok. Arról is lényeges információt nyújthatnak ezek, hogy mely diákjainknak kell majd több támogatás, illetve kik azok, akiknek a tudására jobban építhetünk a közös munka során. Az így szerzett tudást akár tanulópárok, kisebb csoportok kialakítására is felhasználhatjuk.

Javasolt házi feladatok:

1. Keresd meg a 120 összes osztóját!

Magyarázat: A következő órán részletesen átbeszéljük majd az osztók keresését az osztópárok módszerével. Gyorsíthatja a megbeszélést, ha a diákok előtte gondolkodtak ezen a feladaton.

2. Számológép használata nélkül dönts el, hogy a felsorolt számok közül melyek oszthatók 7-tel!

a) 707

d) $707 \cdot 713$

b) 713

e) $707 \cdot 713 + 707$

c) $707 + 713$

f) $707 \cdot 713 + 713$

Magyarázat: A megoldás során nagyon sok, ezen az órán előkerült fogalmat kell használni, jó gyakorlófeladat. A 707 osztható 7-tel, a 713 nem (6 maradékot ad 7-tel osztva). Az összegük nem osztható 7-tel, a szorzatuk igen. Az e) (két 7-tel osztható szám összege) osztható 7-tel, az f) nem.

3. Határozd meg írásbeli osztással az $\frac{1}{7}$ tizedes tört alakját! Mi a tizedesvessző utáni 100. számjegy?

Magyarázat: A megoldás során nagyon sok, ezen az órán előkerült fogalmat kell használni, jó gyakorlófeladat. A végtelen szakaszos tizedestört: 0,142857142857... Hat számjegy ismétlődik. A 100 4 maradékot ad 6-tal osztva, így a keresett számjegy 8.

Mellékletek

Ki mit tud? feladatlap

Fájtnév: # számelmélet_01_ki_mit_tud

Osztójáték szabályait tartalmazó ppt

https://docs.google.com/presentation/d/1I6NO9k-BFVsl1oKROXTq-jLjkmcL6Q_FACZxRB5Ov3M/edit?usp=sharing

Táblázatos nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.