

7. óra: Oszt 6 OK?

Az óra célja: Az eddigi oszthatósági szabályok rendszerezése, összetett oszthatósági szabályok megismerése és gyakorlása.

Előzetes tudás: oszthatóság, prímtényező felbontás, oszthatósági szabályok

Központi fogalmak: oszthatósági szabályok, állítás és tagadása, prímtényezők

Az óra legfontosabb elemei

	<i>Rövid leírás</i>	<i>Módszer</i>	<i>Segédeszköz</i>	<i>Várható időtartam</i>
1.	Órakezdés, feladatellenőrzés			5 perc
2.	Oszthatósági szabályok rendszerezése	frontális		10 perc
3.	Számtáblázat vizsgálata oszthatósági szempontból	páros munka, frontális munka	számtáblázat; kivetítő	12 perc
4.	Oszthatósági állítások gyakorlása	páros munka	kivetítő	8 perc
5.	Összetett oszthatósági szabályok megbeszélése	frontális		9 perc
6.	Az óra lezárása			1 perc

Az előző órán hosszan vizsgáltuk azt, hogy a helyiértékeknek mi köze van az oszthatósági szabályokhoz. Az összetett oszthatósági szabályok kicsit más megközelítést igényelnek: az eddigi módszerek mellé oda kell tenni a prímtényező felbontásból következő megfigyeléseket.

Bár eljárhatnánk úgy is, hogy a megfelelő szabályokat gyorsan ismertetjük, majd nekiállunk a nagyüzemi gyakorlásnak, most nem ezt az utat választjuk. Úgy gondoljuk, hogy az összetett oszthatósági szabályok jó alkalomként szolgálnak arra, hogy megvizsgáljuk egy adott számmal osztható számok „ritmusát” a számegyenesen, valamint a logika elemeit is gyakoroljuk állítások megfogalmazásával, azok indoklásával.

Az óra előkészítése

Szükséges:

- Számtáblázatok** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően.
Fájlnév: [számelmélet 07 melléklet számtáblázat](#)
- Oszthatósági szabályok feladatlap** nyomtatása a csoport létszámának megfelelően. Fájlnév: [számelmélet 06 07 melléklet feladatlap](#)

Opcionális:

Prezentáció vetítése – táblai vázlattal kiváltható
Fájlnév: [számelmélet 07 melléklet összetett oszthatóság](#)

Az óra felépítése

1. Köszöntés, feladat ellenőrzés (5 perc)

A tanár köszönti a diákokat, és közösen megbeszéli velük az előző óra végén kiadott feladat megoldását. Érdekes törekedni arra, hogy minél inkább a diákok mondják a megoldásokat és a gondolkodás alapját képező szabályokat, hiszen ezeket fogjuk a továbbiakban is használni.

A feladat és megoldásai:

Hányféle módon lehet az ismeretlenek helyére számjegyeket írni úgy, hogy

- a) $\overline{2a3}$ osztható legyen 3-mal; b) $\overline{214b6}$ osztható legyen 8-cal;
c) $\overline{742xy}$ osztható 4-gyel és 5-tel; d) $\overline{37x34y}$ osztható 4-gyel és 9-cel?

Mo: a) $a \in \{1; 4; 7\}$, tehát **3** eset van.

b) $b \in \{1; 5; 9\}$, tehát **3** eset van.

c) $y = 0$, x tetszőleges páros, tehát **5** eset van.

d) Az $(x;y)$ párok lehetséges értékei: $(1;0)$, $(6;4)$, $(2;8)$, tehát **3** eset van.

2. Az eddigi oszthatósági szabályok rendszerezése (8 perc)

Ennek az órarésznek az a célja, hogy az eddigi oszthatósági szabályokat rendszerezzük, rögzítsük. Azért, hogy az esetlegességeket elkerüljük, a frontális megbeszélést javasoljuk.

A tanár a következő kérdések mentén eleveníti fel és összegzi a múlt órán tanultakat:

- Az eddig tanult oszthatósági szabályoknál mit vizsgáltunk meg egy-egy szám esetén? Tudunk-e két különböző csoportot felállítani? (végződés szerint, számjegyek összege szerinti)
- Az 5-tel oszthatóságnál miért volt elég az utolsó számjegyet nézni, a 4-gyel oszthatóságnál miért nem elég az utolsó, miért kell az utolsó kettő számjegyből képzett számot vizsgálni? (a helyiértékes alak felelevenítése)
- Miért nem jó az alábbi szabály: „Egy szám akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegye osztható 4-gyel.”? Hogy szólna a szabály helyesen? (a 412-ben az utolsó 2 számjegy egyike sem osztható 4-gyel; osztható viszont a belőlük képzett szám, ami a szabályban is szerepel)
- Mely oszthatóságok látszanak az utolsó jegyből, melyek az utolsó kettőből, melyek az utolsó háromból? Gyűjtsünk minél több példát!

Az előző kérdések megvitatása alapján az alábbi vázlat lejegyzését javasoljuk:

Oszthatósági szabályok

Három alaptípus:

- A. Végződés alapján
- B. Számjegyek összege alapján
- C. (ezt egyelőre üresen hagyjuk)

A. Végződés alapján

- Utolsó számjegy: 2-vel, 5-tel, 10-zel
- Utolsó két számjegyből képzett szám: 4-gyel, 100-zal, (25-tel)
- Utolsó három számjegyből képzett szám: 8-cal, 1000-rel

B. Számjegyek összege alapján: 3-mal, 9-cel

A tanár ellenőrzi, hogy a vázlat mindenkinek a füzetébe bekerüljön.

3. Számtáblázat és oszthatóságok (12 perc)

A következő részben az oszthatósági szabályok mellé újabb megfigyeléseket teszünk, ehhez néhány háromjegyű számot vizsgálunk meg oszthatósági szempontból. A diákok használhatnak számológépet, de biztassuk őket a szabályok alkalmazására.

A tanár a feladathoz elindítja a prezentációt, és elmondja, hogy mi lesz a feladat:

Tanár: Az oszthatósági szabályokat előbb összegyűjtöttök, most lehetőségetek lesz jó sokszor gyakorolni őket. Egy számtáblázatot láttok kivetítve, mindjárt ki is fogom osztani nektek. A táblázatnak 25 mezője van, minden mező közepében egy főszám áll, a főszám körül láthatok kis keretezett számokat is. Az első feladatokat az lesz, hogy minden egyes mező esetében azokat a keretezett számokat színezzétek be, amelyek osztói a főszámnak (pl. 112 esetén színezzétek be a 2-t és a 4-et, de a 3-t ne). Hasznos, ha a 2-eseket mindenütt egyforma színűvel színezzétek, a 3-asokat egy másik színnel, stb.

Miután a színezést elvégeztétek, próbáljátok megfigyelni, milyen mintázatot adnak ki azok a mezők, ahol a $\boxed{2}$ be van színezve! Tegyétek meg ugyanezt a beszínezett $\boxed{3}$ -asokkal is, stb. Próbáljátok indokolni az észrevételeiteket!

A feladatra összesen 10 perctek van. A táblázatokat egyedül színezzétek, de nyugodtan egyeztetsetek a párotokkal azt, amire jutottatok!

A tanár kiosztja a táblázatokat, felügyeli a munkát, segít az elindulásban azoknak, akik már az elején elakadtak. A 10 perc végére remélhetőleg minél több párnál rajzolódik ki az alábbi színezés:

<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">100</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">101</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">102</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">103</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">104</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">105</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">106</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">107</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">108</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">109</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">110</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">111</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">112</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">113</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">114</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">115</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">116</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">117</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">118</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">119</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">120</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">121</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">122</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">123</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 2 3 4 </div> <p style="text-align: center; font-weight: bold;">124</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 5px;"> 5 6 12 </div>

A csoport a tanár vezetésével ellenőrzi a helyes színezést és az alábbi észrevételek mentén átbeszéli az eddigi tapasztalatokat:

- Végig kellett-e nézni az összes számra az oszthatósági szabályokat, hogyan lehetett esetleg gyorsítani a színezésen? (Ha kihasználtuk, hogy pl. minden harmadik szám osztható 3-mal, akkor elég volt egy hárommal oszthatót megtalálni, majd ebből kiindulva hármanként lépkedve kaphattuk a többi 3-mal oszthatót.)
- Mi az oka a páros számok sakktáblaszerű elhelyezkedésének? Mi az oka a 3-mal osztható számok átlós elhelyezkedésének, a 4-gyel oszthatóak „visszafelé átlós” elhelyezkedésének? (A páros számok mintázata azért lesz sakktáblaszerű, mert minden második szám színeződik, és a sorátlépésnél eggyel elcsúszunk a felső sorhoz képest. A 3-mal oszthatóaknál azért rajzolódnak ki az átlós vonalak, mert egy 3-mal osztható számról 6-ot előrelépve újra 3-mal oszthatót kapok, és a táblázatban egy számból az alatta lévő szám jobb szomszédjáig 6 lépés vezet.)
- Érdekes rámutatni arra is, hogy a színezés periódusaival már találkoztunk, mégpedig az osztógrafikonnál. A párhuzamot tovább erősíti, hogy bár kicsit másképp, de a ferde egyenesek ott is fontos szerephez jutnak. Az osztógrafikon éppen ezért a ppt diái között is megtalálható.

4. Oszthatósági szabályok kapcsolata (10 perc)

Tanár: Az előbb láttuk, hogy milyen szabályosságok figyelhetőek meg egy-egy szint figyelve. Most koncentráljunk egy-egy mezőre! Jól látható, hogy nagyon változó, hogy melyik alapszám mezőjén hány négyzetet színeztünk be, összefüggésben azzal, hogy az alapszám mennyire gazdag osztóiban. Vannak esetleg olyan színezések, amelyek mindig együtt járnak?

Diák: Például a 2 és a 4 színezése?

Tanár: Alapvetően jó, de pontosítsd kicsit! Például a 122-nél a 2 színezve van, de a 4 nincs. Akkor mégsem jár mindig együtt a kettő.

Diák: Úgy értettem, hogy ha valahol a 4-et beszíneztem, akkor ott a 2 is biztosan színezve volt.

Tanár: És hogyan lehetne lefordítani ezt a színezős állítást oszthatósági nyelvre?

Diák: Ha egy szám osztható 4-gel, akkor osztható 2-vel is.

A tanár átlépteti a prezentációt a következő, hiányos állításokat tartalmazó diára.

Tanár: Remek! A következőkben ilyenfajta állításokat kell kigondolnotok a táblázat megfigyelése alapján. A most látható dián megjelent 4 hiányos mondat, mindegyiket egészítsétek ki fejenként legalább egyféle módon anélkül, hogy a párokkal egyeztetnétek. A mondatok között legyen olyan, amelyik nem igaz. Ha megvagytok, az állításaitokat mondjátok el a párotnak, akinek el kell döntenie, hogy az általatok mondott szabály igaz-e. Lehetőleg gondolkodjatok azon is, hogy egy-egy szabály helyességére milyen indoklásotok van. Az egész feladatra 10 perctek van.

A kiegészítendő állítások:

Ha egy szám osztható ..., akkor osztható ... is.

Ha egy szám osztható ..., akkor nem biztos, hogy osztható

Ha egy szám nem osztható ..., akkor nem osztható ... sem .

Ha egy szám osztható ... és ..., akkor osztható ... is.

A tanár körbe járva figyeli a diákok munkáját, figyeli, hogy milyen állítások, milyen érvek hangzanak el, ezek közül valószínűleg több is beépíthető a folytatásba.

5. Összetett oszthatósági szabályok megfogalmazása (8 perc)

Az idő lejártával a tanár összegyűjti a figyelmet, és néhány állítást kihangosít, majd megbeszéli azokat indoklással együtt. Az olyan mondatokat, amelyek igazságában vita volt egy-egy páros tagjai között, mindenképpen érdemes közösen megbeszélni. Az alábbi gondolatokon véleményünk szerint mindenképpen hasznos végig menni:

- Hogyan indokoljuk, hogy nem igaz: „Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 3-mal is.”? (*Adjunk ellenpéldát.*)
- Igaz-e, ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is? Miért? (*Ha a szám osztható 4-gyel, akkor a prímtényező felbontásában van legalább 2 db 2-es, ekkor viszont biztosan páros is.*)
- Mit mondhatunk az előző állítás megfordításáról?

- Miért igaz: „Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is.”? (A 2-vel és 3-mal oszthatóság miatt a szám prímtényezői felbontása tartalmazni fog 2-es és 3-as prímtényezőt, ezek szorzata 6, tehát a szám osztható 6-tal).
- Az előző állítás hogyan jelenik meg a táblázat színezésében?
- Igaz-e: „Ha egy szám osztható 2-vel és 6-tal, akkor 12-vel is.”? (Nem, a 6 vagy a 18 is ellenpélda, a táblázatból pedig a 114.)
- Miért nem működik az előző indoklás (ha 2-vel és 3-mal, akkor 6-tal is) ebben az esetben? (Ha valami osztható 6-tal, akkor már a 2-vel oszthatóság nem ad új információt, a 6-tal oszthatóság már magában foglalja azt).
- Mi lenne megfelelő szabály a 12-vel vett oszthatóságra? („Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor 12-vel is.”)
- Miért igaz az előző állítás? (A 4-gyel való oszthatóság biztosít a prímtényezői felbontásban 2 db 2-est, a 3-mal oszthatóság 1 db 3-ast, tehát a számnak osztója lesz a $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.)
- Érdekes arra is kitérni, hogy a 12-vel való oszthatóság esetén azért működött a 3-mal és 4-gyel oszthatóságra felbontás, mert 3 és 4 relatív prímelek, a legkisebb közös többszörösük pedig a 12, ami a 6-ra és 2-re nem igaz. Ez a szempont újabb összetett oszthatósági szabályok kitalálásához is hasznos.

A kérdések megbeszélése után a tanár a csoporttal együttműködve rögzíti a legfontosabb összetett oszthatósági szabályokat:

Oszthatósági szabályok - folytatás

C. Összetett oszthatósági szabályok

- **6-tal:** Egy szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha 2-vel és 3-mal egyaránt osztható.
- **15-tel:** 3-mal és 5-tel
- **12-vel:** 3-mal és 4-gyel

6. Az óra lezárása

A tanár kitűzi azokat a feladatokat a feladatlapról, amelyeket célszerűnek gondol otthoni gyakorlásra. Ha netán marad még idő, a diákok kezdjenek el már gondolkodni a feladatokon az óra utolsó perceiben.

A kitűzött feladatok között a feleadatsor 4. feladata mindenképpen szerepeljen, erre építünk a következő órában.

Mellékletek

1. Feladatsor a 6-7. órához

Fájlnév: [számelmélet_06_07_melléklet_feladatlap](#)

2. Számtáblázat

Fájlnév: [számelmélet_07_melléklet_számtáblázat](#)

3. Prezentáció a színezendő táblázathoz

Fájlnév: [számelmélet_07_melléklet_összetett_oszthatóság](#)

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.