

VI. óra: Algebrai kifejezések szorzása

Az óra célja: Algebrai kifejezések szorzásának megbeszélése, gyakorlása.

Előzetes tudás: Felső tagozatos algebra ismeretek, egyszerű műveletek algebrai kifejezésekkel, hatványozás azonosságai.

Központi fogalmak: szorzás, együttható, összevonás.

Az óra legfontosabb elemei

Az óra során a diákok lépésenként jutnak el az egytagú algebrai kifejezések konstanssal való szorzásától a többtagú algebrai kifejezések egymással való szorzásáig:

1. Először az előző órán is használt kártyák segítségével egytagú kifejezéseket szoroznak konstanssal és más egytagú kifejezésekkel.
2. Ezután fizikai és kivetített téglalapok segítségével vizsgálják meg, hogyan lehet a különféle oldalhosszú téglalapok területét kiszámolni.

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Kártyák egytagú algebrai kifejezésekkel** – az előző órán használt kártyákra van szükség itt is, lehetőség szerint használjuk őket újra.
Fájl neve: a5_melléklet_csoportosulós játék
2. **Téglalapok nyomtatása és kivágása.** Páronként egy készletre (9 téglalapra) van szükség.
Fájl neve: a6_melléklet_téglalapok
3. **Kivetítő és internetkapcsolat** a téglalapok interaktív mozgatásához. Az aktív internetkapcsolat kiváltható azzal, ha előre betöltjük a böngészőben az anyag oldalait, vagy pedig ezeket offline fájlként letöltjük, és megnyitjuk a saját asztali GeoGebra szoftverünk segítségével.
Amennyiben nincs lehetőség vetítésre, úgy (karton)papírból kivágott, nagyobb méretű téglalapokkal is dolgozhatunk. Ezeket a kinyomtatott téglalapoknak megfelelő oldalarányban kell elkészíteni.
Link a GeoGebra anyaghoz: <https://www.geogebra.org/m/fhaeqxsx>

Opcionális:

4. **Angol vicces gyakorlófeladatsor nyomtatása**, ezt felhasználhatjuk házi feladatként, vagy egy későbbi órán gyakorlásként.
Fájl neve: a6_melléklet_angol vicces gyakorló

Az óra felépítése

1. Egytagú kifejezések szorzása (10 perc)

Tanár: Húzzon mindenki egy kártyát!

Tanár: Hajtsátok végre az alábbi feladatokat!

- 1) Számítsátok ki a kifejezés helyettesítési értékét, ha $x = (-1)$ és $y = 4$.
- 2) Írjátok fel a füzetetekbe azt az algebrai kifejezést, amit úgy kapunk, hogy a kártyán szereplő kifejezést megszorozzuk 3-mal! Törekedjete rá, hogy minél egyszerűbb alakban írjátok fel a kapott kifejezést! Ellenőrizték a munkátokat behelyettesítéssel!
- 3) Most ismételjétek meg ugyanezt úgy, hogy $\frac{1}{2}$ -del szoroztok.
- 4) Most keressetek magatoknak egy párt a csoportban. Szorozzátok össze az algebrai kifejezéseiteket! Törekedjete rá, hogy minél egyszerűbb alakban írjátok fel a kapott kifejezést. Ellenőrizték a munkátokat behelyettesítéssel.

Módszertani megjegyzés

A kártyák az 5. tanórához használt kártyák – a húzás kihagyható, ha mindenki emlékszik az előző órán húzott kártyájára.

Módszertani megjegyzés

Ha van rá idő, akkor többféle párosításban is megismételhetjük az utolsó feladatot.

2. Algebrai kifejezések szorzása (10 perc)

Tanár: Mindenki menjen vissza a helyére. Szeretném megbeszélni a tapasztalatokat. Milyen típusú algebrai kifejezés szerepelt a kártyákon?

Diák: Szorzat. Egytagú algebrai kifejezés.

Számmal szorzás

Tanár: Hogyan kellett az egytagú algebrai kifejezéseket **számmal szorozni**?

Diák: Az együtthatót kellett megszorozni 3-mal, illetve $\frac{1}{2}$ -del.

Egytagú kifejezések szorzata

Tanár: És hogyan kellett **két egytagú kifejezés szorzatát megállapítani**?

Diák: Mivel minden egytagú kifejezés szorzat, és a szorzás sorrendje felcserélhető, ezért érdemes volt az együtthatókat, és a különböző ismeretleneket külön-külön összeszorozni. Szükség esetén használni a hatványozás definícióját (azonosságait).

Példa:

$$2x^2 \cdot (-5xy) = 2 \cdot x \cdot x \cdot (-5) \cdot x \cdot y = 2 \cdot (-5) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y = -10x^3y$$

Írjunk fel néhány példát!

Írjunk fel további példákat!

Tanár: Az óra következő részében azt fogjuk megvizsgálni, hogyan kell **algebrai kifejezések összegét szorozni**. Ehhez egy GeoGebra tananyagot fogunk használni.

Módszertani megjegyzés

Nyissuk meg az alábbi linken elérhető GeoGebra tananyagot:

<https://www.geogebra.org/m/fhaeqxsx>

Ha nem tudunk kivetítőt használni, akkor a következő két ábrát a táblára felrajzolva is be tudjuk mutatni a diákoknak, az óra további részében pedig azt javasoljuk, hogy nagyobb méretű, papírból kivágott téglalapokat rögzítsünk a táblán gyurmaragasztóval.

Első oldal, első feladat

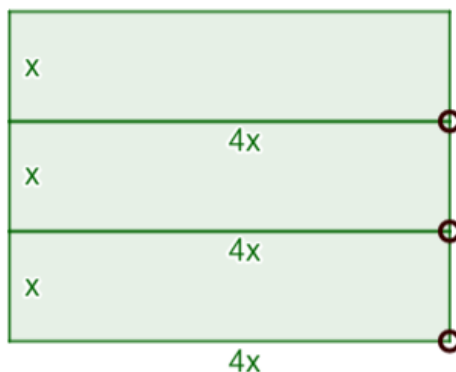
Tanár: Lássuk az első oldalt! Mekkora a zöld téglalap területe?



Diák: $4x^2$

Első oldal, második feladat

Tanár: Nagyon jó. Most illesszünk egymás mellé 3 ilyen téglapot! Mekkora az így kapott téglalap területe? Próbáljuk meg minél többféleképpen felírni!



Diák: $4x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 3 \cdot 4x^2 = (x + x + x) \cdot 4x = 3x \cdot 4x = 12x^2$

Tanár: Hogyan kaphatunk még ugyanekkora területű téglalapot?

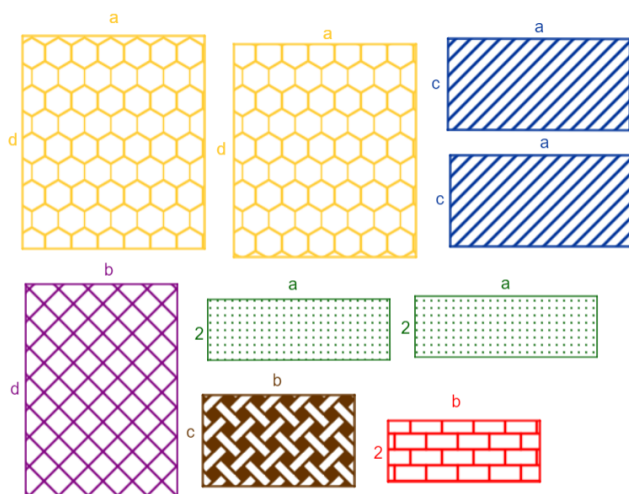
Diák: Ha a rövidebb oldal mentén illesztjük össze a három téglalapot.



Diák: $4x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 3 \cdot 4x^2 = x \cdot (4x + 4x + 4x) = x \cdot 12x = 12x^2$

3. Téglalapok területének felírása többféleképp (10 perc)

Tanár: Minden pár kap 9 téglalapot, ezek a kivetítőn is láthatóak. A feladat, hogy ezeknek a téglalapoknak az összeillesztésével építsetek téglalapokat, hasonlóan az előző feladatban látottakhoz. Rajzoljátok le a füzetetekbe a megépített téglalapot, és írjátok mellé a területét minél többféleképpen. Ha egy téglalappal elkészültetek, akkor építsetek másikat!



Járjunk körbe, segítsük a diákok munkáját.

Interaktív felület

A téglalapok mozgatható formában elérhetőek a GeoGebra felület második oldalán:

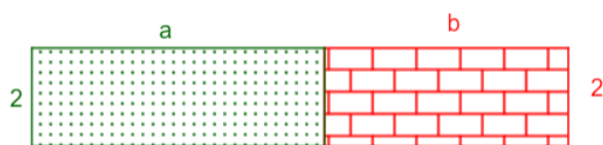
<https://www.geogebra.org/m/fhaeqxsx>

4. Többtagú kifejezések szorzása (13 perc)

A GeoGebra anyag negyedik, ötödik és hatodik oldala

Tanár: Nézzünk néhány példát!

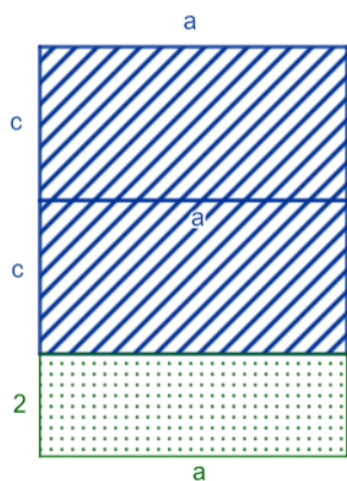
Példák:



$$2 \cdot (a + b) = 2a + 2b$$



$$c \cdot (a + b) = ca + cb = ac + bc$$



$$\begin{aligned} (c + c + 2) \cdot a &= ca + ca + 2a = \\ &= (2c + 2) \cdot a = 2ca + 2a = 2ac + 2a \end{aligned}$$

Módszertani megjegyzés

Ha nincs az osztályteremben internet (de kivétel van), akkor két megoldás közül választhatunk: vagy betöltjük a böngészőben előre a GeoGebra anyag oldalait egyesével, vagy pedig szintén egyesével letöltjük ezeket, és megnyitjuk a saját asztali GeoGebra szoftverünk segítségével.

Tanár: Hogy lehetne összefoglalni eddigi tapasztalatainkat?

Diák: Hogy összeget úgy kell szoroznunk, hogy a szorzótényezővel az összeg minden tagját megszorozzuk.

Tanár: Igen. Általánosan így fogalmazható meg a szabály:

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

Tanár: Igaz-e ugyanez, ha a zárójelben nem összeg, hanem különbség szerepel?

Diák: Igen, bár nem tudunk indoklasként könnyen ábrát készíteni. A kivonás tulajdonképpen negatív együtthatójú kifejezés hozzáadása. Ha a fenti szabály minden kifejezés esetén jó, akkor különbségre is jónak kell lennie.

Módszertani megjegyzés

Érdeklődőbb csoportban előkerülhet, hogy ezt a tulajdonságot úgy is mondhatjuk, hogy *a szorzás az összeadásra nézve disztributív*.

Tanár: Mondjunk néhány példát!

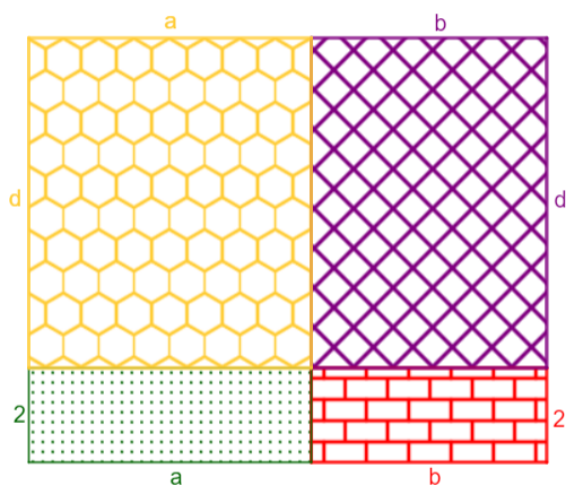
Példák:

$$(a - 3) \cdot 4 = 4a - 12$$

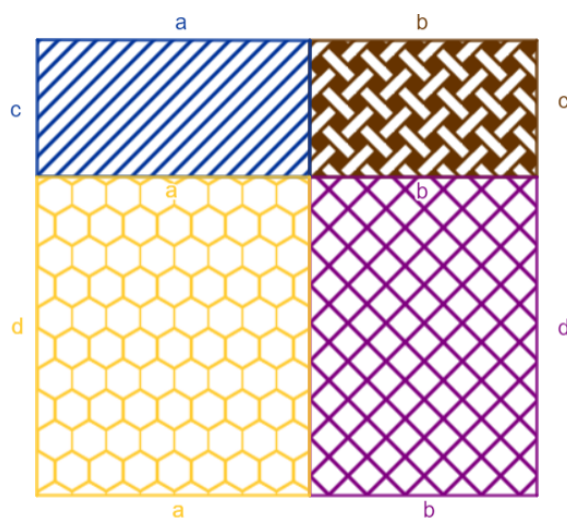
$$x \cdot (x^2 - 2x) = x^3 - 2x^2$$

Tanár: Illesztett-e valaki össze 4 téglalapot?

Példák:



$$(d + 2) \cdot (a + b) = da + db + 2a + 2b = ad + bd + 2a + 2b$$



$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Tanár: Mit veszünk észre?

Diák: Az egyik zárójelben szereplő összeg mindkét tagját meg kell szorozni a másik zárójelben szereplő kifejezés mindkét tagjával, és az így kapott négy kifejezést össze kell adni.

Tanár: Ezt röviden így mondjuk: Két kéttagú összeg szorzásakor négytagú összeget kapunk. (Ezután bizonyos esetekben az így kapott tagok összevonhatók.)

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Módszertani megjegyzések

Érdekes megbeszélni a magyarázatot: $(c + d)$ kifejezést „letakarjuk” (egy kifejezésként kezeljük), és alkalmazzuk rá a korábban tanult összefüggést, azaz tagonként szorzunk.

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Tanár: Mi a helyzet különbségek esetén?

Diák: Ugyanígy kell eljárni, csak figyelni kell az előjelekre.

Példák:

$$(k - 3) \cdot (m + 2) = km + 2k - 3m - 6$$

$$(x - 5) \cdot (2x - 1) = 2x^2 - x - 10x + 5 (= 2x^2 - 11x + 5)$$

Módszertani megjegyzés: Ha szükséges, írjunk fel néhány további példát.

5. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán algebrai kifejezések szorzásával foglalkoztunk. Ezt tudjátok gyakorolni a kiosztott feladatlap megoldásával.

Fájlnéve: a6_melléklet_angol vicces gyakorló

Lehetséges táblaképek az óráról

Algebrai kifejezés szorzása

$$3 \cdot (-3z^3) = 3 \cdot (-3 \cdot z \cdot z \cdot z) = -9z^3$$

$$3 \cdot \frac{xy^2}{3} = xy^2$$

$$\left(\frac{1}{2}y^2z\right) \cdot (yz) = \left(\frac{1}{2}y \cdot y \cdot z\right) \cdot (y \cdot z) = \frac{1}{2}y^3z^2$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline \end{array} \quad T = x \cdot 4x = 4x^2$$

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline x \\ \hline x \\ \hline \end{array} \quad T = 3x \cdot 4x = 12x^2$$

$$3 \cdot (x \cdot 4x) = 12x^2$$

$$4x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 12x^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4x & 4x & 4x \\ \hline \end{array} \quad \times \quad \underbrace{(3 \cdot 4x)}_{12x} = 12x^2$$

szorzat

$$\begin{array}{l} \textcircled{c} \cdot (a+b) = ac+bc \\ a \cdot (d+2) = ad+2a \\ (2c+2) \cdot a = 2ac+2a \\ \textcircled{c+c+2} \cdot a = ac+ac+2a \\ (c+d+2) \cdot a = ac+ad+2a \end{array}$$

összeg

szorzat

$$\textcircled{2+c} \cdot (a+b) = \textcircled{2a} + \textcircled{ac} + \textcircled{2b} + \textcircled{bc}$$

összeg

$$\begin{array}{l} (2+d) \cdot (a+b) = 2a+2b+ad+bd \\ (x-3) \cdot (x+3) = x^2+3x-3x-9 = x^2-9 \\ (x-3)^2 = (x-3)(x-3) = x^2-3x-3x+9 = x^2-6x+9 \\ \textcircled{2+a+b} \cdot \textcircled{2+c+d} = 2a+ac+ad+2a+ac+ad+2b+bc+bd = \\ = 4a+2ac+2ad+2b+bc+bd \end{array}$$

Mellékletek

Kivágható téglalapok

Az órán használt téglalapkészlet fekete-fehér, nyomtatható formátumban.

Fájlnéve: a6_melléklet_téglalapok

GeoGebra Book (hivatkozás)

Az órán egy GeoGebra könyvet használunk, ahol interaktív felületek segítségével a kivetítőn is tudjuk mozgatni a téglalapokat, ugyanúgy, ahogy a gyerekek a kivágott készletet. A könyv továbbá előre összeállított példákat is tartalmaz az egyes feladatok megoldásaira.

Link: <https://www.geogebra.org/m/fhaeqxsx>

Részletes nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnéve: a6_táblázatos óravázlat_részletes

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Fájlnéve: a6_táblázatos óravázlat_A4

Gyakorlófeladatsor egy angol nyelvű viccel (lehetséges házi feladat)

Algebrai kifejezések szorzását gyakoroltató feladatsor, amelynek megoldása során egy angol nyelvű vicc poénját kapják meg a diákok. Felhasználhatjuk házi feladatként, vagy megoldhatjuk egy gyakorlóórán közösen.

Fájlnéve: a6_melléklet_angol vicces gyakorló