

IV. óra: Összeg, szorzat, hatvány

Az óra célja: Algebrai kifejezések pontos kiolvasása; az összeg, hatvány, szorzat fogalmak használatának tudatosítása; összevonás gyakorlása.

Előzetes tudás: Felső tagozatos algebra ismeretek, egyszerű műveletek algebrai kifejezésekkel.

Központi fogalmak: algebrai kifejezés, változó, behelyettesítés, összeg, hatvány, szorzat, összevonás, együttható, egynemű kifejezések.

Az óra legfontosabb elemei

Az órán tovább bővítjük az algebrai kifejezésekről szerzett tudást:

1. Az óra első felében villámkártyák segítségével gyakorolják a diákok az algebrai kifejezések kiolvasását, majd szabadon ötletelve javaslatokat tesznek az algebrai kifejezéseket tartalmazó kártyák csoportosítására.
2. Ezután a diákok által gyűjtött ötletekből kiindulva beszélünk a matematikaórán gyakran használt csoportosításokról: hogy egy algebrai kifejezés lehet összeg, szorzat, vagy hatvány; a változók száma szerint beszélhetünk egy-, két- vagy többváltozós kifejezésekről.
3. Végül pedig az összevonásról lesz szó.

Az óra előkészítése

Szükséges:

1. **Villámkártyák** nyomtatása és kivágása.
Fájl neve: a4_melléklet_villamkártyák
2. **Kivetítő előkészítése.** Amennyiben a teremben nincs vetítésre lehetőség, úgy a táblára előre felrajzolt ábrákkal is dolgozhatunk – rajzolási képességeinktől függően ez még hangulatosabb is lehet, mint a vetítés. Célszerű az ábrákat eltakarni (például a kinyitható tábla egyik szárnyával), hogy csak az óra megfelelő pontján lássák meg a diákok.
A kivetítés helyett pl A4-es oldalra kinyomtatott képekkel is ugyanolyan jól működik.
Fájl neve: a4_melléklet_gyümölcsök_képei

Opcionális:

3. **Gyakorlófeladatsor** nyomtatása, amely házi feladatként, vagy egy következő gyakorló órán is felhasználható („Imre, miért van az arcod lekvárral bekenve?”).
Fájl neve: a4_melléklet_lekváros_összevonás_feladatsor

Az óra felépítése

1. Játék villámkártyákkal (15 perc)

Tanár: „A korábbi órákon láttuk, hogyan kapcsolódnak az algebrai kifejezések különböző tudományokhoz, „való életbeli” problémákhoz, szöveges matematika feladatokhoz. Az elkövetkező órákon az algebrai kifejezések átalakításaival fogunk foglalkozni. Ehhez azonban ki kell tudnunk olvasni a kifejezéseket. Ezt fogjuk most villámkártyákkal gyakorolni. A kártyák egyik oldalán algebrai kifejezések, a másik oldalukon a szöveges leírásuk található.”

„Keverjétek össze a kártyákat, és csináljatok belőlük két kupacot. A pár egyik tagja vegye magához az egyik, a másik a másik kupacot. Az első körben úgy fordítsátok a kártyákat, hogy a felétek lévő oldalon szöveg, pontosabban egy algebrai kifejezés szöveges megfogalmazása álljon. Írjátok fel a kifejezést a füzetetekbe, majd a kártya megfordításával ellenőrizzétek magatokat. Ezt addig folytassátok, amíg el nem fogy a kupacotok.

Nézzünk egy példát, hogy mindenkinek világos legyen. Ha például azt látod a kártyán, hogy a négyzetének és b felének az összege, mit fogsz ekkor leírni a füzetedbe?”

Diák: $a^2 + \frac{b}{2}$

Tanár: Utána cseréljétek a párokkal. Ezt a kupacot fordítva vegyétek magatokhoz. Most a kifejezést látjátok, próbáljátok meg pontosan kiolvasni. Most is ellenőrizzétek magatokat a kártya megfordításával.

Most is nézzünk egy példát! Hogyan kell kiolvasni a következő

kifejezést? $\frac{(a+b)^2}{2}$

Diák: a és b összege négyzetének fele.

Tanár: Ha mindketten elkészültetek, fordítsátok algebrai kifejezéssel felfelé a kártyákat, és próbáljátok meg őket valamilyen általános kitalált szempont szerint csoportosítani! Figyeljétek rá, hogy erre a feladatra maradjon idő, szükség esetén inkább lépjétek tovább úgy, hogy nem olvastátok ki az összes kifejezést!

Rögzítsük a teendőket a táblán:

1. Két kupac készítése
2. Első kupac:
Szöveg alapján algebrai kifejezés (~3 perc)
3. Csere
4. Második kupac:
Algebrai kifejezés kiolvasása (~3 perc)
5. Az algebrai kifejezések csoportosítása (~5 perc)

Módszertani megjegyzés

Ha a diákoknak akár a felírás, akár a kiolvasás nehezen megy, érdemes további példákat nézni.

Az időkeret figyelése

Írjuk fel, meddig dolgozhatnak, vagy vetítsük ki a hátralévő időt, például a www.virtualisora.hu/idozito/ oldal segítségével!

Figyeljünk, hogy a csoportok időben váltsanak a tevékenységek között. Az óra folytatásához fontos, hogy mindenki legalább elkezdjen foglalkozni a kártyák csoportosításával!

Segítő kérdések a csoportosításhoz: Vannak-e olyan kártyák, amelyek valamilyen szempontból hasonlóak? Mi ez a szempont? *vagy* Milyen részei vannak egy algebrai kifejezésnek? *vagy* Nem segíthet a csoportosításban a kiolvasás?

2. A csoportosítás megbeszélése (12 perc)

Tanár: Milyen szempont szerint csoportosítottátok a kifejezéseket?

Néhány lehetséges válasz:

1. A bennük szereplő ismeretlenek száma szerint.
2. A bennük szereplő műveletek szerint.
3. A bennük szereplő számok szerint.

Tanár: Mindegyik csoportosítási ötlet remek, de ezek közül csak néhányat használunk valóban az algebrai kifejezésekkel kapcsolatosan.

Szokás csoportosítani az algebrai kifejezéseket a bennük szereplő ismeretlenek száma szerint: beszélünk **egy-**, **két-** és **többszörös** kifejezésekről. Keressünk példákat ezekre!

És szokás csoportosítani a benne szereplő műveletek szerint is. Pontosabban, hogy mi az utolsóként elvégzendő művelet, ha számokat helyettesítünk a betűk helyére. Eszerint beszélünk

- **össze**ről, amikor az utolsóként elvégzendő művelet összeadás vagy kivonás;
- **szorzat**ról, amikor az utolsóként elvégzendő művelet szorzás vagy osztás;
- **hatvány**ról, amikor az utolsóként elvégzendő művelet hatványozás.

Keressünk példákat ezekre!

Módszertani megjegyzés

Írjunk fel mindenképpen néhány példát! A fogalmakat nem definiáltuk egzakt módon, az algebrai kifejezésekről való kommunikációt segítik, ne legyen cél ezek számonkérése.

3. Összevonás (15 perc)

Vetítsük ki az alábbi képeket:

<https://docs.google.com/presentation/d/1zkaDQLemIyepq8wig5dofgMQhF4YwVASNdZnast72qo/edit?usp=sharing>



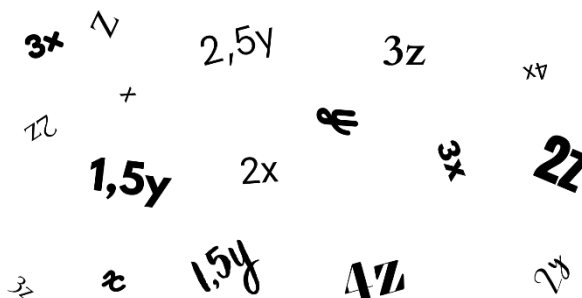
Tanár: Nézzétek meg a kivetített képet! Mit láttok a képen?

Diák: Gyümölcsöket.

Tanár: Hogyan tudnánk ennél pontosabban megfogalmazni, hogy mi van a képen?

Diák: Banánból $3+1+2+1+3+4 = 14$ darab van, meggyből $2+3+1+4+3+2 = 15$ szem van, fügeből pedig $1,5+2,5+1,5+1+2 = 8,5$ darab van a képen.

Tanár: Nézzétek meg az új kivetített képet! Most mit láttok a képen?



Diák: Algebrai kifejezéseket.

Tanár: Mi a közös ezekben az algebrai kifejezésekben?

Diák: A táblán egyváltozós algebrai kifejezések vannak, a legtöbb szorzat.

Tanár: Az olyan algebrai kifejezéseket, melyben nincs összeadás (kivonás) művelete, csak szorzás és hatványozás van, **egytágú algebrai kifejezéseknek** nevezzük. Az egytágú algebrai kifejezésekben szereplő számszorzókat a kifejezés **együtthatójának** nevezzük. Például a $4z$ kifejezés együtthatója 4, az y -é pedig 1.

Módszertani megjegyzés

Megbeszélhetjük, hogy nem szükséges egészen pontosan felsorolni az összes részletet a képen külön-külön.

Módszertani megjegyzés

Felidézhetjük, hogy az algebrai kifejezéseknél a számok és változók közé nem kell kitenni a szorzásjelet.

Módszertani megjegyzés

Érdekes több példát is megbeszélni, esetleg megkérni a diákokat, hogy alkossanak példákat más egytagú kifejezésekre, és mindegyiknél megbeszélni az együtthatót. Egy-egy példával felhívhatjuk a figyelmet arra, hogy az együttható lehet tört, vagy akár negatív szám is.

A fogalmakat nem definiáltuk egzakt módon, az algebrai kifejezésekről való kommunikációt segítik, ne legyen cél ezek számonkérése.

Tanár: Összesítsétek a képen szereplő kifejezéseket!

Módszertani megjegyzés

Ha nehézség támad az összesítéssel, érdemes egy kicsit visszaugrani az előző képre, és jobban kihangsúlyozni a hasonlóságokat, vagy a harmadik diával még egyértelműbbé tehetjük a kapcsolatot. Az x lehet egy banán tömege, y egy fügéé, z pedig egy meggyé.

Diák: x -ből összesen $3+1+2+1+3+4 = 14$ darab van, z -ből $2+3+1+4+3+2 = 15$ van, y -ből összesen pedig $1,5+2,5+1,5+1+2 = 8,5$ van.

Tanár: Ezt így is rögzíthetjük:

$$3x + x + 2x + 3x + 4x = 14x$$

Írjatok fel hasonló összesítést az y -okra / z -kre!

Diák:

$$1,5y + 2,5y + 1,5y + y + 2y = 8,5y$$

$$2z + 3z + 1z + 4z + 3z + 2z = 15z$$

Tanár: Hogyan lehetne mindezt egyetlen kifejezéssel leírni?

Diák: $14x + 8,5y + 15z$

Módszertani megjegyzés

Ha felmerül a kérdés, hogy lehet-e még ennél is jobban összesíteni a betűs kifejezéseket (mondjuk például a $14x + 8,5y$ -ra egyszerűbb felírást találni), érdemes megkérdezni a diákokat az ötleteikről és kitalálni velük, hogy hogyan lehetne ellenőrizni, hogy az általuk javasolt összevont alak jó-e.

Már most tisztázhatjuk, hogy akkor mondunk két algebrai kifejezést egyenlőnek, ha a változók helyére bármilyen számot helyettesítve a két algebrai kifejezés helyettesítési értéke megegyezik. (Vissza is utalhatunk az előző órai behelyettesítési feladatra.)

Tanár: Mi jellemző ezekre az algebrai kifejezésekre?

Diák: A táblán egy-, illetve kétváltozós algebrai kifejezések vannak; szorzatok, illetve hatványok. Ezek is egytagú kifejezések.

Tanár: Végezzük el ennél a képnél is az összesítést! Adjuk meg az összes a képen lévő algebrai kifejezés összegét a lehető legegyszerűbb alakban!

$$\begin{array}{cccc} x^2 & 4x & 2x & 4xy \\ & x^2 & -2x & -x^2 \\ 3x & 3x^2 & \frac{xy}{2} & 2x^2 \end{array}$$

Diák:

$$3x + 4x + 2x + (-2x) = 3x + 4x + 2x - 2x = 7x$$

$$x^2 + x^2 + 3x^2 + (-x^2) + 2x^2 = x^2 + x^2 + 3x^2 - x^2 + 2x^2 = 6x^2$$

$$\frac{xy}{2} + 4xy = \frac{1}{2}xy + 4xy = \frac{9}{2}xy = 4,5xy$$

Összesen tehát: $7x + 6x^2 + 4,5xy$.

Módszertani megjegyzés

Az összevonás megbeszélése után mindenképpen térjünk ki arra, hogy tudunk-e még egyszerűbb formát adni a $7x + 6x^2 + 4,5xy$ összegnek. Ellenőrizzük behelyettesítésekkel az egyszerűbb alakra érkező javaslatokat.

Tanár: Fogalmazzuk meg, mikor tudunk és mikor nem tudunk egyszerűbb alakra hozni egy összeget!

Diák: Azokat tudtuk összeadni, amikben ugyanazok voltak a változók, és ugyanazon a hatványon szerepeltek. Vagyis amelyek maximum csak együttthatóikban tértek el.

Tanár: Az ilyen kifejezéseket hívjuk **egynemű** kifejezéseknek. Az egynemű kifejezések összeadását, illetve kivonását **összevonásnak** nevezzük.

Módszertani megjegyzés

Írjunk fel mindenképpen néhány példát az eddig látottakon kívül. A csoport érdeklődésétől függően érdemes pontosabb definíciót adni.

4. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán láthattuk, hogy az egynemű kifejezések összevonásakor a műveleteket csak az együttthatókkal kell elvégezni. A nem egynemű kifejezések összegét nem tudjuk egyszerűbben megadni.

Az egynemű kifejezések összevonását gyakorolhatjátok a kiosztott feladatlap segítségével.

Lehetséges táblaképek az óráról

Algebrai kifejezés csoportosítása

I. Változók száma szerint

egyváltozós kifejezések: $\frac{a}{4}$, $x^2 + 2025$
 többváltozós kifejezések pl. kétváltozós $a^2 + b^2$
 háromváltozós $a^2 + b \cdot c$

II. Művelet szerint – utolsó szerint

összeadás, kivonás – összeg $a + b$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
 szorzás, osztás – szorzat $a \cdot b$, $(a + b) \cdot 4$
 hatványozás – hatvány $\left(\frac{1}{a}\right)^2$

III. Van-e ismertlen a kifejezésben?

igen – algebrai tört $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
 nem – algebrai egész $\frac{a^2 + 5}{2}$

$a - b$ $(a + b)^{2024}$ $\left(\frac{1}{a}\right)^2$ $\frac{1}{a}$
 $\frac{a \cdot b}{c}$ $a^2 \cdot b^2$ a^2 $a + b^2$
 $\frac{2}{3}a$ b^3 $a \cdot b^2$ $a + b$
 ab $a \cdot b \cdot c$ c^4 $\frac{a}{b}$
 $(a + b) \cdot a^2$

EGYTAGU KIFEJEZÉSEK
 $\frac{2}{3} \cdot a$
 együtt lehet
 $1 \cdot a \cdot b \cdot c$
 $1 \cdot b \cdot b \cdot b$

Az egyenlő kifejezések csak együtt lehetnek egymástól.

Az egyenlő kifejezések összeronthatók.

Mellékletek

Villámkártyák

A kártyák egyik oldalán algebrai kifejezések, másik oldalán ezek kiolvasása áll.

Fájlnév: a4_melléklet_villámkártyák

Az összevonás gyümölcsös képei

A képek fehér háttérrel és háttér nélkül is megtalálhatók a fájlban.

Fájlnév: a4_melléklet_gyümölcsök_képei

Részletes nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájlnév: a4_táblázatos óravázlat_részletes

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Fájlnév: a4_táblázatos óravázlat_A4

Gyakorlófeladatok (lehetséges házi feladat)

Egynemű kifejezések összevonását gyakoroltató feladatsor, melynek megoldása során egy vicc poénját fejthetik meg a diákok („Imre, miért van az arcod lekvárral bekenve?”). Felhasználhatjuk házi feladatként, vagy megoldhatjuk egy gyakorlóórán közösen.

Fájlnév: a4_melléklet_lekváros összevonás feladatsor