

VII. óra: Ki emel, ki emel?

Az óra célja: Összeg szorzattá alakítása, kiemelés megbeszélése, gyakorlása.

Előzetes tudás: felső tagozatos algebra ismeretek, algebrai kifejezések csoportosítása, algebrai kifejezések szorzása

Központi fogalmak: összeg, szorzat, kiemelés

Az óra legfontosabb elemei

- A diákok villámkártyákat készítenek, amelyeknek egyik oldal egy szorzat alakban megadott algebrai kifejezés szerepel, a másik oldalon pedig ennek a kibontott alakja. Az óra elején ezeknek a segítségével gyakorolják a beszorzást.
- A folytatásban téglalapok területének többféle megadásával foglalkozunk: ezúttal a diákok egymásnak készítenek feladványokat, ahol az összeg alakban megadott algebrai kifejezéshez kell megtalálni a megfelelő téglalapot (és egyúttal a szorzat alakot). A tanulságok alapján tisztázzuk a csoporttal a kiemelés fogalmát.
- Az óra végén ismét a villámkártyákat használjuk, de ezúttal fordítva: a diákoknak azt gyakorolják, hogyan írhatják fel az összeg alak alapján a szorzat alakot.

Az óra előkészítése

Szükséges:

- **Üres kártyák** előkészítése a villámkártyákhoz, fejenként 5 darab.
- **Az előző órán használt kivágott téglalapok** előkészítése.
[Fájl neve: algebra9_06_melléklet_téglalapok](#)

Opcionális:

1. **Vetítő** előkészítése a téglalapok kivetítéséhez.
Link: <https://www.geogebra.org/geometry/quuvcymq>
2. **Színezős feladatlap nyomtatása** házi feladatnak, gyakorlásnak a szorzattá alakításhoz
Fájl neve: [algebra9_07_melléklet_színezős_kiemelés_feladatsor](#)

Az óra felépítése

1. Villámkártyák készítése (8 perc)

Tanár: Az előző órán algebrai kifejezések szorzását tanultuk meg. Ennek gyakorlásához villámkártyákat fogunk készíteni. Mindenki kap 5 üres kártyát. Ezek egyik oldalára fel kell írni egy szorzatot, majd a másik oldalra a szorzás eredményeképpen kapott összeget. Például, ha az egyik oldalra szorzatalakként azt írom, hogy $2x^2 \cdot (x - 3)$, akkor mit kell írnom a másik oldalra?

Diák: $2x^3 - 6x^2$

Tanár: Igen, ez tökéletes. Persze nem szeretnénk, ha minden kártya egyforma lenne, ezért a következőket szeretném kérni.

- Legyen olyan kártya, ahol a beszorzás utáni eredmény kéttagú összeg, de olyan is, ahol többtagú.
- Gondoljatok arra, hogy vannak negatív számok és törtek is – jelenjenek meg ilyenek is az együtthatók között!
- Legalább az egyik kártyán használjátok az ismeretlen jelölésére a saját nevetek kezdőbetűjét!
- A felírt feladataitok legyenek fejben megoldható nehézségűek!

5 percek van a kártyák elkészítésére.

Rögzítsük a táblán, mi mindenre kell figyelni:

- Egyik oldal: szorzat (példa)
- Másik oldal: összeg (példa)
- Legyen az összegek között kéttagú és többtagú is
- Szerepeljenek negatív és tört együtthatók
- Szerepeljen a nevetek kezdőbetűje ismeretlenként

Mire figyeljünk a feladat alatt?

Sétáljunk körbe, segítsünk az elakadóknak. Nem baj, ha nem készít mindenki 5 kártyát, de jó, ha 2-3 darab mindenkinél lesz.

2. Beszorzás gyakorlása villámkártyákkal (5 perc)

Tanár: Most az elkészült kártyákkal fogjuk gyakorolni a beszorzást!

- Megbeszélünk egy sorrendet a tanteremben, mindenkinek meglesz, hogy **kinek kell majd továbbadnia** a kártyákat.
- Mindig **a szorzatalak legyen felül**, amikor továbbadod.
- Nézd meg a kapott kártyán szereplő szorzatalakot, majd **végezd el a beszorzást**, írd fel az összegalakot a füzetedbe. Fordítsd meg a kártyát és **ellenőrizd magad**.
- Ha minden rendben, **add tovább a kártyát**.
- Ha szerinted nem te hibáztál, hanem a kártya hibás, hívj engem! 5 percig fogunk a villámkártyákkal gyakorolni.

Sorrend

Érdeemes a továbbadási sorrend meghatározásakor egy olyan kört kialakítani, amelyben mindenki kényelmesen tudja átadni a kártyát a következőnek.

Feltorlódó kártyák

Több kártya van, mint gyerek, de ettől még feltorlódhatnak kártyák néhány helyen – ezek közül érdemes néhányat megoldás nélkül továbbadni, hogy senkinek ne kelljen várakoznia.

Alternatíva az időkeretre

Fix időkeret helyett gyakorolhatunk addig, amíg valakinek nem sikerül 10 beszorzást helyesen elvégezni.

3. Téglalapok területének felírása többféleképpen (10 perc)

Tanár: Megint kiosztom a múlt órai téglalapokat, ezúttal is kettesével fogtok ezekkel dolgozni.

- Alkossatok párokat!
- Ismét azt kérem, hogy rakjatok ki a kicsi téglalapokból egy nagyobb téglalapot, és írjátok fel a területét többféleképpen: szorzat- és összegalakban egyaránt.
- A pár egyik tagja írja fel a kapott összegalakot a táblára.
- Ha minden páros felírta az összegalakot, akkor az lesz a feladatotok, hogy megállapítsátok az összegalakokhoz tartozó szorzatalakokat! Ebben segíthet, ha kirakjátok a megfelelő téglalapokat. Az eredményeket a füzetetekbe írjátok le.
- Minderre kb. 10 percek van.

Feladványok a táblán

Összesen annyi feladvány lesz, ahány párosunk van. Érdemes megszámozni a feladványokat, hogy a megbeszélés során tudjunk majd hivatkozni rájuk.

Segítsünk a feladványok megoldásában

Ha minden feladvány felkerült a táblára, sétáljunk körbe, és segítsünk az elakadóknak. Buzdítsuk őket a téglalapok megépítésére. Az összegalak tagjai a különálló téglalapok területei, az egyenlő oldalaik mentén tudják összeilleszteni őket, majd ez alapján leolvasni a szorzat alakot.

A munka alatt nézzük át a villámkártyákat

Amíg a csoport ezen dolgozik, érdemes átnézni a villámkártyákat: az óra végén a kiemelés szeretnénk vele gyakorolni, a csoport számára nehezebb (pl. csoportosítva kiemelés igénylő) kártyákat érdemes a kártyacsomagból kihagyni.

4. Kiemelés megbeszélése (15 perc)

Tanár: Beszéljük meg a tapasztalatokat! Volt a feladványok között olyan, amikor csak kéttagú volt az összeg? Foglalkozzunk először azzal!

Példa: $ac + bc$

Tanár: Hogyan lehetett ennél gondolkodni?

Diák: Meg kellett keresni azt a téglalapot, amelynek oldalai a és c hosszúságúak, mert ennek lesz a területe ac . Illetve azt a téglalapot, amelynek oldalai b és c hosszúságúak. Ezeket kellett úgy összeilleszteni, hogy téglalapot kapjunk.

Tanár: És ez hogyan volt lehetséges?

Diák: A közös c oldal mentén.



Tanár: És ezután mit kellett tenni?

Diák: Csak felírni a területet másképpen, szorzatalakban: $c \cdot (a + b)$

Tanár: Igen, ez nagyon jó. Ezt röviden úgy is mondhatjuk, hogy **kiemelünk** c -t.

$$c \cdot a + c \cdot b = c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c$$

Mi köze a kiemelésnek a beszorzáshoz?

Diák: Tulajdonképpen visszafelé kell csinálni a beszorzást.

Tanár: Igen, kicsit visszafelé kell gondolkodni. Olyasmi ez, mint, amikor kivonást végzünk. Tulajdonképpen akkor is visszafelé gondolkodunk, azt próbáljuk meg kitalálni, hogy mihez kellene hozzáadni a kivonandót, hogy a kibebbítendőt kapjuk. Kiemeléskor is azt próbáljuk kitalálni, hogy mit kell beszoroznunk a kiemelt tényezővel, hogy a vizsgált kifejezést kapjuk. Összeadni könnyű, kivonni kicsit nehezebb. De a kivonást mindig lehet összeadással ellenőrizni. Itt is valami hasonló a helyzet: beszorozni nem olyan nehéz, kiemelni, a szorzat alakot megtalálni időnként nehezebb. De szorzással mindig ellenőrizhetünk.

Tanár: Mi a helyzet most a negatív együtthatókkal? Mit kell csinálni, ha mondjuk ezt a kifejezést szeretnénk szorzattá alakítani: $2x^2 - 6xy - 8x$

Diák: Valójában semmi, ugyanúgy kell eljárni, csak most megint nem tudjuk a feladatot könnyen modellezni téglalapokkal.

Módszertani megjegyzés

Ha ki szeretnénk vetíteni a téglalapokat, ezt az oldalt használhatjuk:
<https://www.geogebra.org/geometry/quuvcymq>

Módszertani megjegyzés

Nézzük meg a diákok további példáit. Ha nagyon hasonlóak, akkor válogassunk közülük. Érdeklődőbb csoportban a csoportosítva kiemelés is szóba kerülhet.

Tanár: Rendben, akkor mit csináljunk?

Lehetséges válasz: Ki lehet emelni 2-t. Azt kapjuk, hogy $2 \cdot (x^2 - 3xy - 4x)$.

Tanár: Mindenki erre gondolt?

Diák: Ki lehet emelni x -et is. Azt kapjuk, hogy $2x \cdot (x - 3y - 4)$.

Tanár: Hogy tudnánk ezt ellenőrizni?

Diák: Beszorzással.

Tanár: Ha kiemelést, szorzattá alakítást végzünk, akkor próbáljunk meg minél „többet”, azaz minél több tényezőt kiemelni. Ez sokszor segít a feladatmegoldásban (pl. egyenletek esetén).

Algebrai törtek

Érdeklődőbb csoportban előkerülhet, hogy törtek kialakításával még „többet”, így a fenti példában x^2 -et is ki tudunk emelni.

Tisztázzuk, hogy nem akarunk algebrai törteket kapni a kiemelés, szorzattá alakítás eredményeként!

5. Kiemelés gyakorlása villámkártyákkal (5 perc)

Tanár: Hogyan tudnánk a kiemelést, szorzattá alakítást gyakorolni az elkészített villámkártyákkal?

Diák: Fordítva kell használnunk őket.

Tanár: Rendben, akkor ezt fogjuk tenni. Most mindig az összegalak legyen felül, amikor továbbadod. Nézd meg a kapott kártyán szereplő összegalakot, majd végezd el a kiemelést, illetve szorzattá alakítást, írd fel a szorzatalakot a füzetedbe. Fordítsd meg a kártyát és ellenőrizd magad. Add tovább a kártyát. 5 percig fogunk a villámkártyákkal gyakorolni.

Sorrend

Használjuk az óra elején kialakított továbbadási sorrendet.

Feltorlódó kártyák

Ismét figyeljünk arra, hogy ne torlódjanak fel a kártyák. Szükség esetén érdemes néhányat megoldás nélkül továbbadni.

Alternatíva az időkeretre

Fix időkeret helyett gyakorolhatunk addig, amíg valakinek nem sikerül 10 kiemelést helyesen elvégezni.

6. Az óra lezárása (2 perc)

Tanár: A mai órán kiemeléssel, szorzattá alakítással foglalkoztunk. Ezt tudjátok gyakorolni a kiosztott színezős feladatlap megoldásával.

Lehetséges táblaképek az óráról

Szorattá alakítás

$$ab + ab = 2ab$$

$$ac + ab = a \cdot (c + b) \quad \text{kiemelés}$$

$$ac + ad + 2a = a \cdot (c + d + 2)$$

$$x^2y - 2xy^2 = xy \cdot (x - 2y)$$

$$5x^3 + \frac{x}{2} - x^2 = x \cdot (5x^2 + \frac{1}{2} - x)$$

$$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = (c + d) \cdot (a + b)$$

Mellékletek

Kivágható téglalapok

Az órán használt téglalapkészlet fekete-fehér, nyomtatható formátumban. Azonos a VI. órán használt készlettel, így ha ez megmaradt, akkor nem szükséges újra nyomtatni.

Fájl neve: [algebra9_o6_melléklet_téglalapok](#)

Részletes nyomtatható óravázlat

Ebben a dokumentumban táblázatos formátumban található meg minden olyan információ, amire hasznos lehet az óra tartása közben rátekinteni. Nincsenek benne hosszú szöveges részek és módszertani megjegyzések, de részletesen követhető az óra felépítése.

Fájl neve: [algebra9_o7_táblázatos_óravázlat_részletes](#)

Egyoldalas nyomtatható óravázlat

Táblázatos formátumú óravázlat, ahol a leglényegesebb információk egy A4-es oldalnyi terjedelemben összefoglalva szerepelnek.

Fájl neve: [algebra9_o7_táblázatos_óravázlat_A4](#)

Színezős gyakorlófeladatsor (lehetséges házi feladat)

A feladatsorral a diákok összegalakban megadott algebrai kifejezések szorzattáalakítását gyakorolhatják kiemeléssel. Plusz motivációt jelenthet a feladatok megoldásában, hogy a helyesen elvégzett szorzattáalakítások alapján kiszínezhethetnek és kitalálhatnak egy színezőben elrejtett képet. Akár órai munkának vagy otthon elkészítendő gyakorlásnak is hasznos a feladatlap.

Fájl neve: [algebra9_o7_melléklet_színezős_kiemelés_feladatsor](#)